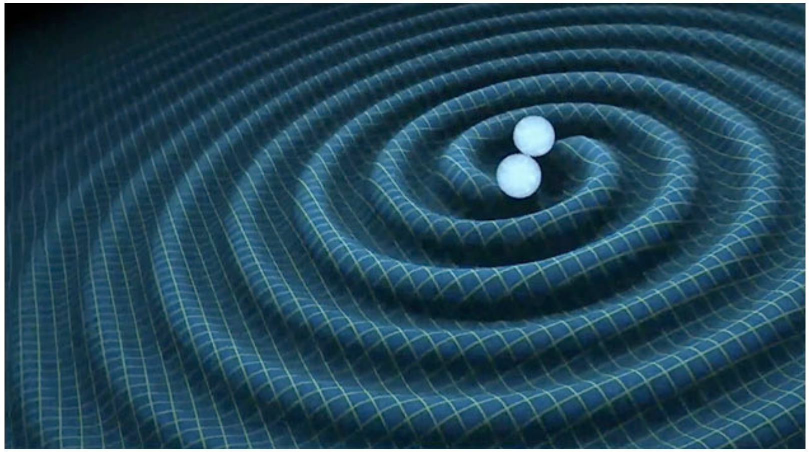
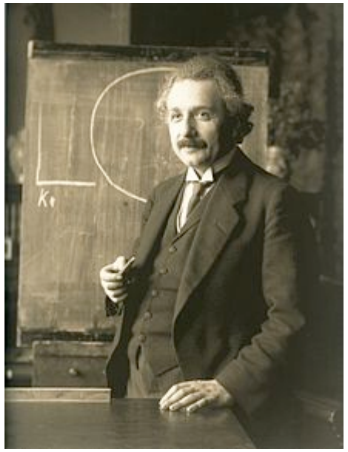
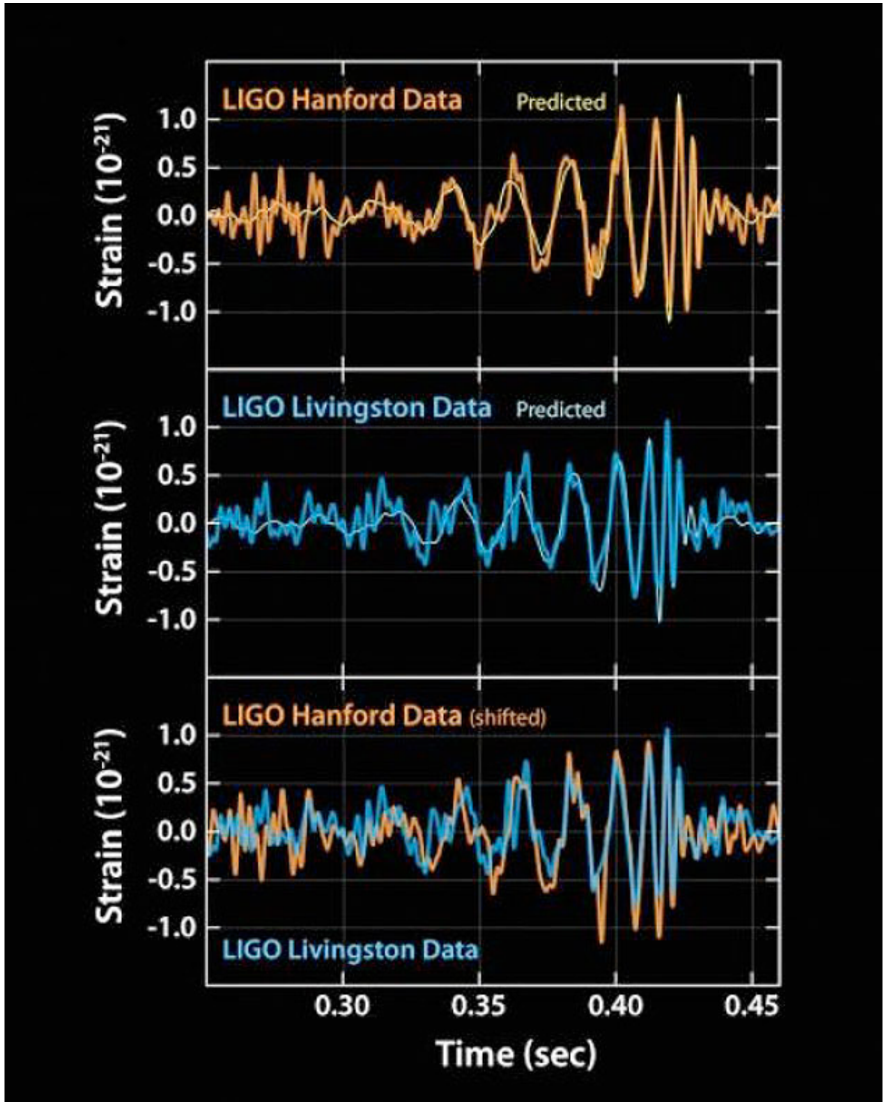
Anhang C: Wellen



Computersimulation der von zwei sich umkreisenden Schwarzen Löchern ausgelösten Gravitationswellen in der Raum-Zeit (Illu.)



Albert Einstein
1879-1955



→ vorhergesagt 1916 (Albert Einstein)

→ Entdeckung 2016 (LIGO-Kollaboration)

C Wellen

C.1 Harmonische Wellen

Wellen beschreiben den Transport von Energie und Impuls in Raum und Zeit. Dieser Transport kann durch ein Medium, aber auch im Vakuum erfolgen. Ein Materialtransport über größere Entfernung ist dabei nicht notwendig.

Das einfachste Beispiel sind Seilwellen, die in einem gespannten Seil durch die Zugspannung benachbarter Bereiche aufeinander entstehen. Lenkt man ein so gespanntes Seil an einem Ende (bei $x = 0$) kurzzeitig aus, so breitet sich diese Störung mit einer festen Geschwindigkeit (v) zum anderen Ende des Seils hin aus. Bei einer vollkommen periodischen Anregung der Form (siehe harmonische Schwingung)

$$f(x = 0, t) = f_o \cos(\omega t)$$

beobachtet man an einer anderen Stelle (x_1) des Seils eine Auslenkung der gleichen funktionalen Form,

$$f(x_1, t) = f_o \cos(\omega t - k x_1)$$

aber um den Winkel $\Delta\varphi = k \cdot x_1$ phasenverschoben. Eine Momentaufnahme (Photographie) zur Zeit t_0 zeigt die gleiche funktionale Form als Funktion von x,

$$f(x, t_0) = f_o \cos(\omega t_0 - kx)$$

Eine solche harmonische Welle ist also

$$\boxed{f(x, t) = f_o \cos(\omega t - kx)} \tag{C.1}$$

Die funktionale Form einer Welle ist gleich in Raum und Zeit.

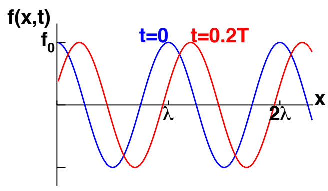


Abb. C.1
Welle als Funktion des Ortes zu zwei verschiedenen Zeiten

Die Auslenkung des Seils kann dabei senkrecht zur Hauptrichtung des Seils und zur Ausbreitungsrichtung der Welle sein (Transversalwelle), bei einem gespannten Seil (oder einer langen Spiralfeder) kann aber auch parallel zur Ausbreitungsrichtung eine Welle angeregt werden (Longitudinalwelle). In vielen Fällen kann man daher eine Welle durch einen Vektor charakterisieren,

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}_o \cos(\omega t - kx) \tag{C.2}$$

oder, für beliebige Ausbreitungsrichtungen (mit $|\vec{k}| = k$) und für beliebige Phasenlagen φ_0 bei $t = 0, \vec{r} = 0$,

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}_o \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)} \tag{C.3}$$

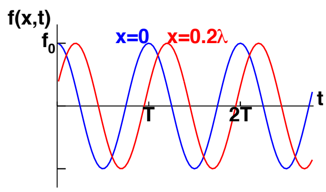


Abb. C.2
Welle als Funktion der Zeit an zwei verschiedenen Orten

Die Größen in dieser Wellenfunktion werden bezeichnet als

$\vec{f}_0$ der Polarisationsvektor mit der Amplitude $|\vec{f}_0|$.

ω die Kreisfrequenz der Welle, die mit Periodendauer T und Frequenz ν zusammenhängt,

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}} \tag{C.4}$$

$\vec{k}$ der Wellenvektor, der die Ausbreitungsrichtung der Welle angibt und von der Wellenlänge λ abhängt ($|\vec{k}|$ = Wellenzahl),

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}} \tag{C.5}$$

Damit kann man die Welle auch schreiben als

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_o \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{\vec{r}\vec{e}_k}{\lambda} + \varphi_0\right)} \tag{C.6}$$

Bei einer Schwingung (z.B. einer Feder) ist die gespeicherte Energie proportional zum Quadrat der Amplitude, $E_{pot} \sim \frac{1}{2}Dy^2$, und $E_{kin} \sim \frac{1}{2}m\dot{y}^2$. Bei einer Welle kann man analog die Intensität oder Energiedichte definieren. Sie wird bei mechanischen Wellen wieder proportional zum Quadrat der Amplitude sein,

$$I \sim f^2 \tag{C.7}$$

C.2 Beispiele für Wellen

Voraussetzung für die Ausbreitung von Wellen ist eine Wechselwirkung räumlich benachbarter Bereiche. Ursache dafür kann ein Medium wie das Seil sein, aber es gibt auch Wellen im Vakuum.

- Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten entstehen durch den Stoß benachbarter Atome/Moleküle aneinander. Der Transport von Impuls ist verantwortlich für die Ausbreitungsrichtung, so dass Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten longitudinal polarisiert sind.

- Schallwellen in Festkörpern (und Erdbebenwellen) können sowohl longitudinal als auch transversal polarisiert sein, denn durch die Bindung zu benachbarten Atomen breiten sich Auslenkungen auch senkrecht zur Auslenkungsrichtung aus (Beispiel schwingender Stab).

- Oberflächenwellen entstehen z.B. bei Erdbeben, wenn eine Longitudinal- oder Transversalwelle an die Oberfläche gelangt und sich dort eine senkrecht (und daher transversal) polarisierte Welle parallel zur Oberfläche weiter fortpflanzt.

  Wasserwellen sind eine besondere Form der Oberflächenwellen, bei der die Bewegung der einzelnen Wasserteilchen nahe der Oberfläche allerdings kompliziertere Formen annimmt.

- Elektromagnetische Wellen sind Schwingungen der $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder, die sich gegenseitig beeinflussen und so weiter fortpflanzen. EM-Wellen gibt es auch im Vakuum. Sie sind Transversalwellen (siehe aber die Diskussion beim Hertz'schen Dipol).
- Gravitationswellen werden durch die Allgemeine Relativitätstheorie vorhergesagt. Sie entsprechen der Ausbreitung der Verzerrungen der Raum-Zeit durch die Gravitation und sollten sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Der erste experimentelle Nachweis erfolgte 2016 durch die LIGO-Kollaboration.

C.3 Wellengleichung und Form der Lösungen

Die in Gleichung C.3 angegebenen harmonischen Wellen $\vec{f}(\vec{r},t)$ sind Lösungen der Wellengleichung

$$\boxed{\partial_t^2 \vec{f} - v^2\, \nabla^2 \vec{f} = 0} \tag{C.8}$$

oder kurz $\Box \vec{f} = 0$. Das lässt sich besonders aufschlussreich zeigen, wenn man die Abkürzungen $g = cos$ und

d'Alembert Operator $\Box$

$$\varphi(\vec{r},t) = \omega t - \vec{k}\vec{r} \tag{C.9}$$

einführt,

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_0 \cdot g(\varphi)} \tag{C.10}$$

Nach Kettenregel ist dann wegen $\partial_t \varphi = \omega,\ \partial_x \varphi = -k_x$

$$\begin{aligned}
\partial_t \vec{f} &= \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \cdot \partial_t \varphi = \omega\, \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \\
\partial_t^2 \vec{f} &= \omega^2 \vec{f}_0 \cdot g''(\varphi) \\
\partial_x \vec{f} &= -k_x\, \vec{f}_0 \cdot g'(\varphi) \\
\partial_x^2 \vec{f} &= +k_x^2\, \vec{f}_0 \cdot g''(\varphi) \\
\nabla^2 \vec{f} &= k^2 \vec{f}_0 \cdot g''(\varphi)
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Damit ist dann auch

$$\partial_t^2 \vec{f} - v^2 \nabla^2 \vec{f} = (\omega^2 - v^2\, k^2)\, \vec{f}_0\, g''(\varphi) = 0 \tag{C.12}$$

für alle

$$v = \frac{\omega}{k} \tag{C.13}$$

Dies gilt unabhängig von der speziellen Funktion $g(\varphi)$. Damit ist ausser $g = cos$ auch jede beliebige andere Funktion $g(\varphi)$ oder $\vec{f}(\varphi)$ eine Lösung dieser Wellengleichung, wenn sie mehrfach differenzierbar ist. φ darf allerdings die Variablen $\vec{r}$ und t ausschließlich in der angegebenen Form $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ beinhalten.

Damit ist z.B. auch die komplexe Darstellung

$$\boxed{\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{f}_0\, e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0)}} \tag{C.14}$$

eine Lösung der Wellengleichung. Der Realteil hiervon ist natürlich gerade wieder die Lösung aus Gl. C.3.

C.4 Ebene Wellen und Kugelwellen

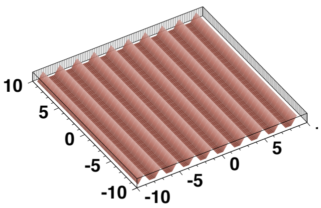


Abb. C.3 Wellenfronten konstanter Phasen bei einer ebenen Welle in $\vec{k}$ Richtung.

Alle Lösungen der Form von Gl. C.10 beschreiben (für $\vec{k} = const.$) ebene Wellen, bei denen die Wellenfronten gleicher Phase $\varphi = \omega t - \vec{k}\vec{r}$ Ebenen sind, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{k}$ stehen. Dies ist offensichtlich, da z.B. der Gradient von jeder der Komponenten von $\vec{f}$ parallel zu $\vec{k}$ ist,

$$\nabla f_x(\vec{r},t) = -i\vec{k}\, f_x(\vec{r},t)$$

Punkte gleicher Phase (also z.B. das Maximum der cos-Funktion) erfüllen

$$\omega t_1 - \vec{k}\vec{r}_1 = \omega t_2 - \vec{k}\vec{r}_2$$

Phasengeschwindigkeit

so dass die Geschwindigkeit v, mit der sich Punkte konstanter Phase bewegen, gegeben ist durch $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Damit ist $\omega = \vec{k}\,\vec{v}$ und die Welle breitet sich in $\vec{k}$ Richtung aus. Die Phasengeschwindigkeit einer Welle ist damit gegeben durch

$$\boxed{v = \frac{\omega}{k}} \tag{C.15}$$

Polarisation

Für eine transversal polarisierte Welle ist $\vec{f}_0 \cdot \vec{k} = 0$, für eine longitudinal polarisierte Welle ist $\vec{f}_0 \times \vec{k} = 0$.

Im Gegensatz dazu ist eine Kugelwelle von der Form

$$f(\vec{r},t) = f_0\, \frac{e^{i(\omega t - k\, r + \varphi_0)}}{r} \tag{C.16}$$

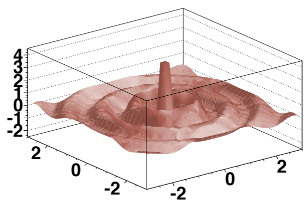


Abb. C.4 Wellenfronten konstanter Phasen bei einer Kugelwelle.

Dies ist ebenfalls eine Lösung der Wellengleichung C.8. Sie hängt nur vom Betrag $|\vec{r}|$ und der Wellenzahl k ab, hat also Wellenfronten, die kugelförmig um den Nullpunkt liegen. Aus Gründen der Energieerhaltung nimmt die Amplitude mit dem Radius ab, denn der Energiefluss durch eine Kugelfläche mit Radius r_1 um den Nullpunkt ist proportional zu $\pi r_1^2 \cdot I(r_1) = \pi r_1^2 \cdot f^2(r_1)$. Damit dies auch für andere Radien gilt, muss $f \sim 1/r$ sein.

C.5 Linearität und Superposition

Bei einem physikalischen Pendel wird normalerweise die potentielle Energie für kleine Winkelauslenkungen α um die Ruhelage in einer

Taylor-Reihe entwickelt, $E_{pot} = mgh = mgl(1 - \cos\alpha) \approx \frac{1}{2}mgl\,\alpha^2$, so dass aus $E_{kin} = \frac{1}{2}D(l\dot{\alpha})^2$ und $\partial_t(E_{pot} + E_{kin}) = 0$ eine lineare Differenzialgleichung folgt,

$$\Rightarrow \ddot{\alpha} + \omega^2\alpha = 0$$

Auch bei einem Federpendel ist das Hook'sche Gesetz eine lineare Näherung.

Ähnliches gilt bei der Ableitung der Wellengleichung C.8 für die meisten physikalischen Systeme. In der ersten Näherung kleiner Auslenkungen um eine Ruhelage ergibt sich immer eine lineare Wellengleichung der Form C.8. Sind daher $\vec{f}_1(\omega_1 t - \vec{k}_1\vec{r})$ und $\vec{f}_2(\omega_2 t - \vec{k}_2\vec{r})$ Lösungen der Wellengleichung, so ist auch die Summe

$$\vec{f}_{ges} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2$$

Superpositionsprinzip

eine Lösung. Hierbei spielt es keine Rolle, in welchem Verhältnis ω_1 und ω_2 oder $\vec{k}_1$ und $\vec{k}_2$ zueinander stehen. Auch die funktionale Form von $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ kann unterschiedlich sein. Dieses Superpositionsprinzip ist die Grundlage für die Erklärung zahlreicher Phänomene wie Brechung, Beugung, Interferenz, etc. Insbesondere folgt:

- Die Wellen $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$ durchdringen sich, ohne miteinander zu wechselwirken und sich zu stören. Man kann daher die Ausbreitung jeder Teilwelle separat analysieren und dann addieren.

- Wellen mit beliebigem funktionalen Verlauf können mit einer Fourier-Zerlegung in einzelne harmonische Wellen $\tilde{f}(\vec{k}, t)$ zerlegt werden, die sich unabhängig voneinander ausbreiten und deren Amplituden man anschließend wieder addieren kann.

- Ebene Wellen kann man als eine Summe von Kugelwellen beschreiben.

- Die Amplituden der Wellen addieren sich, aber nicht die Intensitäten. Denn (bis auf Vorfaktoren) ist

  $$I_{ges} = \vec{f}_{ges}^{\,2} = \vec{f}_1^{\,2} + \vec{f}_2^{\,2} + 2\vec{f}_1\vec{f}_2 = I_1^2 + I_2^2 + 2\vec{f}_1\vec{f}_2 \qquad \text{(C.17)}$$

  Den letzten Ausdruck nennt man Interferenzterm. Er ist die Ursache dafür, dass sich Wellen auch gegenseitig auslöschen können.

Alle diese Effekte spielen eine große Rolle z.B. in der Optik.

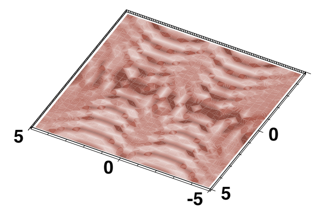


Abb. C.5
Interferenz zweier Kugelwellen.