

Kapitel 6: Schaltkreise

6 Schaltkreise	55
6.1 Schaltvorgänge mit Spulen und Kondensatoren	55
6.1.1 Einschalten einer Spule	55
6.1.2 Einschalten eines Kondensators	56
6.1.3 Ausschalten einer Spule	56
6.2 Energiedichte des Magnetfelds	57
6.3 Energie im Wechselstromkreis	58
6.4 Komplexe Widerstände	59
6.4.1 Ohm'scher Widerstand	60
6.4.2 Kondensator	60
6.4.3 Spule	61
6.4.4 R-L-C Schaltungen	61
6.5 Wechselstromschaltungen	63
6.5.1 R-C Glied als Hochpass	63
6.5.2 R-C Glied als Tiefpass	63
6.6 Schwingkreise	64
6.6.1 R-C-L Serienschwingkreis als Frequenzfilter .	64
6.6.2 R-C-L als Parallelschwingkreis	65

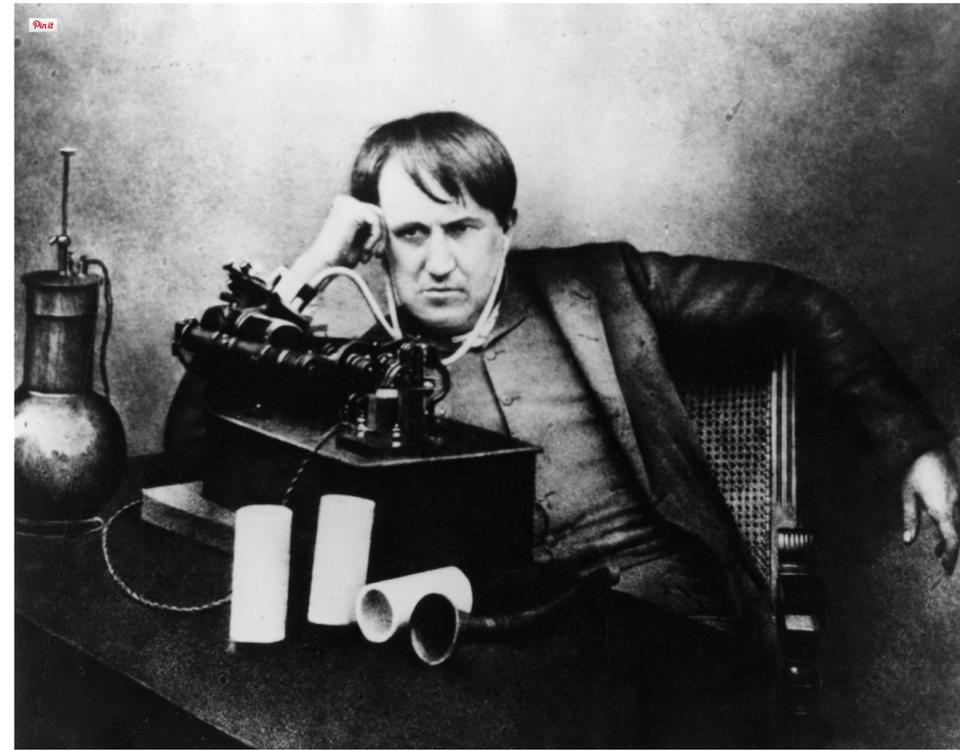
Wechselstrom

Es gibt keinen Grund, der die Verwendung von hochgespannten Wechselströmen, sei es im wissenschaftlichen oder im kommerziellen Bereich, rechtfertigen würde. Man benützt sie lediglich, um an Investitionskosten für den Kupferdraht zu sparen.

Ich persönlich würde wünschen, daß der Gebrauch von Wechselstrom völlig verboten würde. Er ist genauso unnötig, wie er gefährlich ist. . . Ich kann daher keinen Grund für die Einführung eines Systems sehen, das keinerlei Zukunftsaussichten hat, jedoch ungeheure Gefahren für Leben und Eigentum birgt.

Ich habe stets und eindringlich vor Leitungsnetzen für hochgespannten Wechselstrom zur elektrischen Beleuchtung abgeraten, nicht nur wegen der damit verbundenen Gefahr, sondern auch wegen ihrer allgemeinen Unverlässlichkeit und ihrer Unbrauchbarkeit in größeren Leitungsnetzen.

Thomas A. Edison 1889



1847–1931

Thomas Alva Edison was an American inventor and businessman. He developed many devices that greatly influenced life around the world, including the phonograph, the motion picture camera, and the long-lasting, practical electric light bulb. [Wikipedia](#)

6 Schaltkreise

6.1 Schaltvorgänge mit Spulen und Kondensatoren

6.1.1 Einschalten einer Spule

Wir betrachten einen Stromkreis mit Spannungsquelle $U_0 = \text{const.}$, Widerstand R und Spule mit Induktivität L . Hier beinhaltet R sowohl den Ohm'schen Widerstand der Spule als auch den Innenwiderstand der Stromquelle. Schaltet man den Stromkreis zur Zeit $t = 0$ ein, so beobachtet man, dass sich der Strom nur langsam aufbaut, bis er schließlich für $t \rightarrow \infty$ einen konstanten Wert $I = U_0/R$ erreicht. Der Grund hierfür ist die Selbstinduktivität der Spule, in der nach der Lenz'schen Regel eine Gegenspannung aufgebaut wird, die der Spannung U_0 entgegenwirkt.

Für die Maschenregel $\sum_a U = \sum U_R$ wird die induzierte Spannung als weitere Spannungsquelle betrachtet,

$$U_0 + U_{\text{ind}} = U_R = RI$$

mit $U_{\text{ind}} = -L \partial_t I$ folgt

$$U_0 - L \partial_t I = RI \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R} \partial_t I + I = \frac{U_0}{R}$$

also eine Differentialgleichung erster Ordnung. Da die Größe L/R die Dimension einer Zeit trägt und U/R die Dimension eines Stroms, werden die Abkürzungen

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \quad \boxed{I_\infty = \frac{U_0}{R}} \quad (6.1)$$

eingeführt. Damit folgt für die Differentialgleichung⁷

$$\boxed{\tau \cdot \partial_t I + I = I_\infty} \quad (6.2)$$

⁷ Eine Differentialgleichung der Form

$$\tau \partial_t I + I = I_\infty$$

kann man nach Variablen separieren

$$\tau \frac{dI}{dt} = -(I - I_\infty) \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{I - I_\infty} = -\frac{dt}{\tau}$$

und integrieren (nach Umbenennung der Variablen)

$$\int_{I_0}^{I(t)} \frac{dI'}{I' - I_\infty} = - \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{I(t) - I_\infty}{I_0 - I_\infty} = -\frac{t - t_0}{\tau}$$

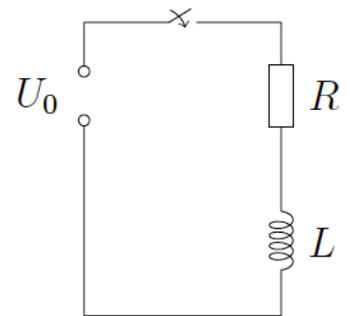


Abb. 6.1
Schaltung zum Einschalten einer Spule.

6.1 Schaltvorgänge mit Spulen und Kondensatoren

Offenbar ist τ die charakteristische Zeit und I_∞ der charakteristische Strom des Einschaltvorgangs. Insbesondere erwartet man für lange Zeiten $t = \infty$ nach dem Einschaltvorgang, dass der Stromkreis stabil wird, d.h. $\partial_t I = 0$. Aus der Differentialgleichung folgt daher unmittelbar, dass

$$I(t = \infty) = I_\infty$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist allgemein

$$\frac{I(t) - I_\infty}{I_0 - I_\infty} = e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (6.3)$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ soll auch der Strom Null sein, $I_0 = 0$. Damit folgt

$$I(t) = I_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6.4)$$

Offenbar baut sich der Strom durch die Selbstinduktion der Spule nur langsam auf mit einer Zeitkonstante $\tau = L/R$.

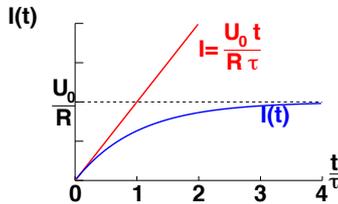


Abb. 6.2
Strom beim Einschalten einer Spule.

6.1.2 Einschalten eines Kondensators

Für die gleiche Schaltung nur mit einem Kondensator der Kapazität C anstelle der Spule gilt nach der Maschenregel mit $U_C = Q/C$

$$U_0 = RI + \frac{Q}{C} = R \partial_t Q + \frac{Q}{C}$$

Hier ist Q die Ladung im Kondensator. Mit

$$\tau = RC \quad Q_\infty = U_0 C \quad (6.5)$$

folgt

$$\tau \cdot \partial_t Q + Q = Q_\infty \quad (6.6)$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form und Lösung wie Gleichung 6.2 mit der Ersetzung $I(t) \rightarrow Q(t)$. Wird der Kondensator ab $t_0 = 0$ aufgeladen, so ist $Q(t = 0) = 0$ und daher

$$Q(t) = Q_\infty (1 - e^{-t/\tau}) \quad (6.7)$$

Der Strom hingegen ist

$$I(t) = \partial_t Q(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Der Kondensator muss zunächst aufgeladen werden. Danach ist der Strom Null. Der Kondensator ist undurchlässig für Gleichstrom.

6.1.3 Ausschalten einer Spule

Eine Spule wird lange Zeit nach Einschalten wieder über einen weiteren Widerstand kurzgeschlossen. Zur Zeit $t \ll 0$ wurde der Schalter geschlossen. Zur Zeit $t = 0$ gilt dann $I_L(t = 0) = U_0/R_L$. Wird

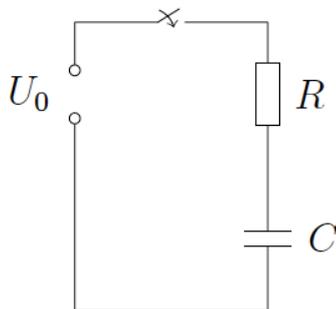


Abb. 6.3
Schaltung zum Einschalten eines Kondensators.

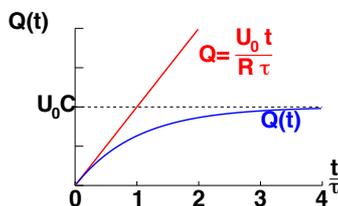


Abb. 6.4
Ladung beim Einschalten eines Kondensators.

der Schalter zur Zeit $t = 0$ geöffnet, so ist die Spule über die beiden Widerstände kurzgeschlossen. Nach der Maschenregel folgt

$$0 = (R_1 + R_L) I + L \partial_t I$$

Mit

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_L}$$

folgt

$$\tau \partial_t I + I = 0$$

Diese Differentialgleichung hat dieselbe Form und Lösung wie Gleichung 6.2 mit der Ersetzung $I_\infty = 0$, so dass

$$I(t) = I_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (6.8)$$

Mit $I(0) = I_L(0) = U_0/R_L$ folgt

$$I(t) = \frac{U_0}{R_L} e^{-t/\tau} \quad (6.9)$$

Insbesondere ist die Spannung ganz kurze Zeit $t \gtrsim 0$ nach dem Kurzschließen

$$U_1 = R_1 I = U_0 \frac{R_1}{R_L}$$

Für $R_1 \gg R_L$ treten daher sehr hohe Spannungs-Spitzen bei R_1 auf. Daher muss beim Ausschalten von Spulen vorsichtig vorgegangen werden, um Schaltungen nicht zu gefährden.

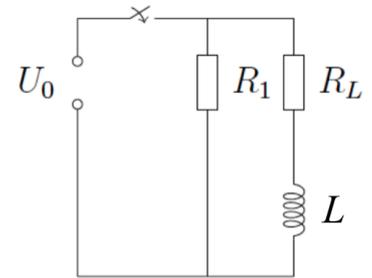


Abb. 6.5
Schaltung zum Ausschalten einer Spule.

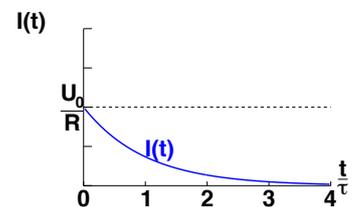


Abb. 6.6
Strom beim Ausschalten einer Spule.

6.2 Energiedichte des Magnetfelds

Die Energie, die im Stromkreis (Abbildung 6.5) nach Abschalten der Spannungsquelle verbraucht wird, muss im Magnetfeld der Spule gespeichert gewesen sein. Daraus soll die Energiedichte des Magnetfelds berechnet werden. In einem kleinen Zeitraum dt wird in den beiden Widerständen die Energie

$$dW = P(t) dt = U I dt = (R_1 + R_L) I^2 dt = \frac{L}{\tau} I^2 dt$$

deponiert. Integration ergibt mit Gleichung 6.9

$$W = \int dW = \int_0^\infty \frac{L}{\tau} I_0^2 e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Der Strom I_0 hatte zum Zeitpunkt $t = 0$ das Magnetfeld $B = \mu_0 \mu_r n I_0$ erzeugt. Zusammen mit der Induktivität L nach Gleichung 5.10 ergibt sich

$$W = \frac{1}{2} B H V \quad (6.10)$$

Die Energiedichte ist damit also

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2 \mu_0 \mu_r} B^2 \quad (6.11)$$

Für eine Kombination aus elektrischem und magnetischem Feld folgt also als Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} E D + \frac{1}{2} B H \quad (6.12)$$

Ein Magnetfeld der Stärke $B = 1\text{T}$ hat also in einem Volumen von $V = 1\text{m}^3$ den Energieinhalt von $W = 4 \cdot 10^5\text{Joule}$.

6.3 Energie im Wechselstromkreis

Wie beschrieben kann man Wechselspannungen durch Drehen einer Spule in einem Magnetfeld recht einfach erzeugen. Im Folgenden soll die Reaktion eines Stromkreises auf eine äußere Wechselspannung betrachtet werden. Einschaltvorgänge, die ja nach kurzer Zeit abklingen, werden hierbei vernachlässigt. Beispiele für Anwendungen sind elektrische Geräte im Haushalt, Musik-Wiedergabe oder elektronische Signalverarbeitung.

Im Allgemeinen wird eine Wechselspannung der Form

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_U) \quad (6.13)$$

mit Frequenz ν , Kreisfrequenz ω und Periodendauer T ,

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \omega = 2\pi \nu \quad (6.14)$$

in einem Schaltkreis mit Widerständen, Kondensatoren und Spulen zu einem Strom

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_I) \quad (6.15)$$

führen. Die im Stromkreis verbrauchte Leistung (siehe auch Gleichung 3.10) zu jedem Zeitpunkt ist

$$P(t) = U(t) I(t)$$

Da Spannung und Strom periodisch sind, reicht es, eine Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

zu betrachten. Die mittlere Leistung über eine Periode ist

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U I dt \quad (6.16)$$

Einsetzen von $U(t)$ und $I(t)$ ergibt aufgrund der Additionstheoreme⁸ unter dem Integral die Terme

$$\int_0^T \cos^2(\omega t + \varphi_U) dt = \frac{1}{2}T, \quad \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_U) \sin(\omega t + \varphi_U) dt = 0$$

Dies gilt unabhängig von der Anfangsphase φ_U bei Integration über eine volle Periode. Insgesamt ergibt sich für die tatsächliche ‘Wirkleistung’

$$\boxed{\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos(\varphi_U - \varphi_I)} \quad (6.17)$$

Die Phasendifferenz zwischen U und I ist also entscheidend für die Wirkleistung.

- $\varphi_U - \varphi_I = 0$
Strom und Spannung sind in Phase, die Wirkleistung ist $\bar{P} = \frac{1}{2}U_0I_0$.
- $\varphi_U - \varphi_I = \pm\pi/2$
Hierfür ist $\bar{P} = 0$, es wird keine Wirkleistung verbraucht.

Häufig werden anstelle der Spitzenwerte U_0 und I_0 die Effektivwerte

$$U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, \quad I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

verwendet, so dass

$$\boxed{\bar{P} = U_{eff} I_{eff} \cos(\varphi_U - \varphi_I)} \quad (6.18)$$

Zum Beispiel ist für die standardisierte Spannung $U_{eff} = 220\text{V}$ die Spitzenspannung $U_0 = 311\text{V}$.

6.4 Komplexe Widerstände

Für Schaltkreise mit mehreren Kondensatoren und Spulen wird die Berechnung der Differentialgleichungen und deren Lösung sehr aufwendig und die resultierenden Widerstände sind frequenzabhängig, $R = R(\omega)$. Man führt daher - zur Vereinfachung der Rechnungen - komplexe Widerstände ein.

Wir betrachten eine kosinusförmige Spannung und wählen den Zeitpunkt $t = 0$ so, dass die Phase Null ist. Der daraus resultierende

⁸ Für $\Delta = \gamma - \beta$ gilt

$$\begin{aligned} & \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \gamma) \\ &= \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta + \Delta) \\ &= \cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha + \beta) \cos \Delta - \sin(\alpha + \beta) \sin \Delta] \\ &= \cos^2(\alpha + \beta) \cos \Delta - \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) \sin \Delta \end{aligned}$$

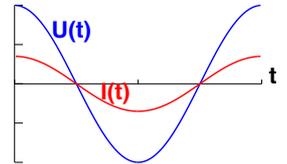


Abb. 6.7
Strom und Spannung in Phase.

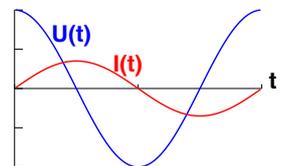


Abb. 6.8
Strom und Spannung um $\pi/2$ phasenverschoben.

Gesamtstrom kann gegenüber der Spannung um einen Winkel φ verschoben sein. Anstelle der Darstellung mit reellen Funktionen

$$U = U_0 \cos \omega t \quad I = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.19)$$

führen wir eine Darstellung mit komplexen Funktionen ein,

$$U = U_0 e^{i\omega t} \quad I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (6.20)$$

Auch hierbei sind U_0 , I_0 und φ reell. Für die komplexe Darstellung definieren wir den komplexen Widerstand

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0} e^{-i\varphi}$$

und die Impedanz als $|Z|$.

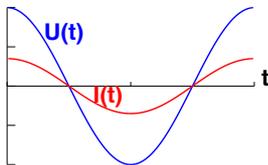


Abb. 6.9
Strom und Spannung sind beim Ohm'schen Widerstand in Phase.

6.4.1 Ohm'scher Widerstand

In diesem Fall gilt auch in der komplexen Darstellung einfach das Ohm'sche Gesetz

$$U = RI = U_0 e^{i\omega t}$$

so dass mit $I_0 = U_0/R$

$$I = \frac{U_0}{R} e^{i\omega t}$$

Die Impedanz ist in diesem Fall reell,

$$Z_R = \frac{U}{I} = R \quad (6.21)$$

Da Strom und Spannung in Phase sind, gilt nach Gleichung (6.17), dass $\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0$.

6.4.2 Kondensator

Die Ladung Q im Kondensator ist gegeben durch Spannung U und die Kapazität $C = Q/U$. Damit folgt für den Strom, der in den Kondensator fließt,

$$I = \partial_t Q = C \partial_t U \quad (6.22)$$

In der komplexen Darstellung folgt aus

$$U = U_0 e^{i\omega t}$$

der Strom

$$I = C \partial_t U = i\omega C U_0 e^{i\omega t} = \omega C U_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \quad (6.23)$$

und für den komplexen Widerstand $Z = U/I$

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad (6.24)$$

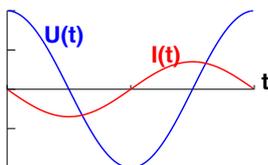


Abb. 6.10
Phasenverschiebung beim Kondensator.

Die Phasenverschiebung um $\pi/2$ ergibt sich, weil erst ein Strom fließen muss, um im Kondensator die Spannung aufzubauen. Dies gilt auch für die reelle Darstellung⁹. Nach Gleichung 6.17 wird bei dieser Phasenverschiebung im Kondensator keine Leistung verbraucht.

Im Kondensator eilt der Strom vor.

6.4.3 Spule

Entsprechend dem Induktionsgesetz ist die Spannung in der Spule gegeben durch

$$\boxed{U = L \partial_t I} \quad (6.25)$$

so dass sich für den Strom

$$I = \frac{1}{L} \int U dt = \frac{1}{L} \int U_0 e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega L} U_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{\omega L} U_0 e^{i(\omega t - \pi/2)} \quad (6.26)$$

ergibt. Der komplexe Widerstand $Z = U/I$ ist damit

$$\boxed{Z_L = i\omega L} \quad (6.27)$$

Die Phasenverschiebung um $-\pi/2$ zwischen Strom und Spannung ergibt sich, weil nach der Lenz'schen Regel die induzierte Spannung dem Strom entgegenwirkt und dieser sich daher erst langsam aufbauen kann. Dies gilt auch für die reelle Darstellung¹⁰. Nach Gleichung 6.17 wird bei dieser Phasenverschiebung in der Spule keine Leistung verbraucht.

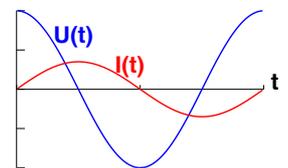


Abb. 6.11
Phasenverschiebung bei der Spule.

Bei einer Induktivität kommt der Strom spät.

6.4.4 R-L-C Schaltungen

Für eine Schaltung mit Ohm'schen Widerständen, Kondensatoren und Spulen ergeben sich Phasenverschiebungen zwischen den Spannungen und Strömen dieser Komponenten. In der reellen Darstellung führt dies zu komplizierten Formeln mit Sinus und Kosinus Termen und deren Amplituden und Phasen. Das Rechnen in der komplexen Darstellung ist dagegen viel einfacher. Entsprechend

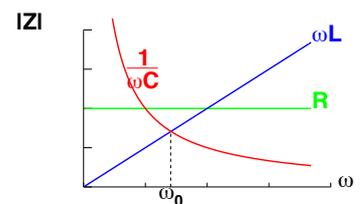


Abb. 6.12
Komplexe Widerstände als Funktion der Frequenz.

⁹ In der reellen Darstellung folgt für $U = U_0 \cos \omega t$ als Strom

$$I = C \partial_t U = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Dies ist aber gerade der Realteil der komplexen Darstellung,

$$\text{Re}(U) = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos \omega t \quad \text{Re}(I) = \omega C U_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

¹⁰ In der reellen Darstellung folgt für $U = U_0 \cos \omega t$ als Strom

$$I = \frac{1}{L} \int U dt = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

Auch für die Spule ist dies gerade wieder der Realteil der komplexen Lösung,

$$\text{Re}(U) = \text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos \omega t \quad \text{Re}(I) = \frac{U_0}{\omega L} \cos(\omega t - \pi/2)$$

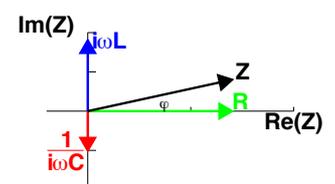


Abb. 6.13
Zeigerdiagramm: Widerstände in der komplexen Ebene.

	Ohm'scher W.	Kondensator	Spule
Formel	$U = RI$	$I = C \partial_t U$	$U = L \partial_t I$
Z	R	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega L$
Phase $\varphi_I - \varphi_U$	0	$+\frac{\pi}{2}$, I vor	$-\frac{\pi}{2}$, I spät
Leistung \bar{P}	$\frac{1}{2}U_0 I_0$	0	0

Tabelle 6.1 Komplexe Widerstände und Phasenverschiebungen bei Wechselspannungen.

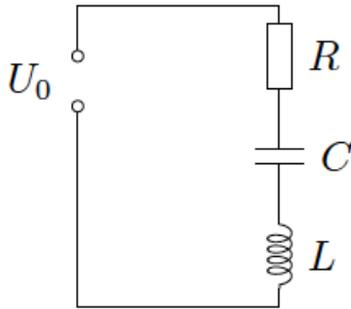


Abb. 6.14
R-C-L Reihenschaltung.

dieser Formeln sperrt der Kondensator bei kleinen Frequenzen ω , die Spule dagegen sperrt bei großen Frequenzen.

Für das Beispiel einer Reihenschaltung von R , C und L in Abb. 6.14 ergibt sich nach den Kirchhoff'schen Regeln

- Knoten: es gibt keine
- Masche:

$$U = U_R + U_C + U_L$$

Hierbei ist U die von außen angelegte Spannung. In der R-C-L-Reihenschaltung kann nun der Gesamtstrom einfach als

$$I_{ges} = U / Z_{ges} \tag{6.28}$$

ermittelt werden, wobei Z_{ges} der komplexe Gesamtwiderstand ist, der durch komplexe Addition der komplexen Widerstände im Zeigerdiagramm berechnet wird. Die Berechnung des Gesamtstroms kann so auf eine Addition komplexer Zahlen zurückgeführt werden.

Das ist einfacher, als die entsprechende Differentialgleichung für den Strom zu lösen, die man aus der Maschenregel durch Ableiten nach der Zeit mithilfe der Formeln aus Tabelle 6.1 erhält:

$$\partial_t U = R \partial_t I + \frac{1}{C} I + L \partial_t^2 I \tag{6.29}$$

Dies ist für $I(t)$ eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit reellen Koeffizienten. Gelöst werden soll diese Gleichung für

$$U = U_0 \cos \omega t$$

Für reelle U_0 ist dies der Realteil der komplexen Winkelfunktion,

$$\text{Re}(U_0 e^{i\omega t}) = U_0 \cos \omega t$$

Man löst also die komplexe Gleichung

$$\partial_t(U_0 e^{i\omega t}) = R \partial_t I + \frac{1}{C} I + L \partial_t^2 I = (R \partial_t + \frac{1}{C} + L \partial_t^2) I$$

mit einem komplexen Ansatz für $I(t)$ und betrachtet nachher als physikalische Lösung nur den Realteil¹¹ von $I(t)$. Dies ist nur ein mathematischer Trick, der funktioniert, weil die Ausdrücke in der Klammer alle reell sind¹².

¹¹Man könnte auch den Imaginärteil von $I(t)$ betrachten. Dieser entspricht der Lösung für $U = U_0 \sin \omega t$ und enthält bis auf eine Phasenverschiebung keine neuen Informationen.

¹²In der Quantenmechanik dagegen müssen Differentialgleichungen

6.5 Wechselstromschaltungen

6.5.1 R-C Glied als Hochpass

Zunächst wird der Gesamtwiderstand und Strom berechnet. Daraus folgt die Ausgangsspannung U_a als Spannungsabfall über den Widerstand R . Für diese Schaltung findet man

$$U = U_R + U_C = Z_R I + Z_C I = (Z_R + Z_C) I = Z_{ges} I$$

mit

$$Z_{ges} = R + \frac{1}{i\omega C} \quad |Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Der Winkel φ_Z zwischen Imaginär- und Realteil von Z ist

$$\tan \varphi_Z = \frac{-1/(\omega C)}{R} = -\frac{1}{\omega C R} \quad Z_{ges} = |Z_{ges}| e^{i\varphi_Z}$$

Damit ist der Strom

$$I = \frac{U}{Z_{ges}} = \frac{U_0 e^{i\omega t}}{|Z_{ges}| e^{i\varphi_Z}} = \frac{U_0}{|Z_{ges}|} e^{i(\omega t - \varphi_Z)}$$

Die Ausgangsspannung U_a wird gemessen als Spannungsabfall über dem Ohm'schen Widerstand R ,

$$U_a = Z_R I = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U = \frac{R U}{Z_{ges}} = \frac{\omega C R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} U e^{-i\varphi_Z}$$

Die Durchlassfunktion für diesen "Spannungsteiler"

$$\frac{|U_a|}{|U|} = \frac{|Z_R|}{|Z_{ges}|} = \frac{\omega C R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

zeigt, dass der Kondensator für kleine Frequenzen sperrt, für hohe Frequenzen $\omega \gg 1/(RC)$ aber durchlässig ist, so dass die Eingangsspannung fast vollständig auch am Ausgang anliegt, $|U_a| \lesssim |U|$ (Hochpass).

Der Strom ist gegenüber der Spannung um $-\varphi_Z$ phasenverschoben. Da an R keine Phasenverschiebung stattfindet, sind U_a und I in Phase und damit ist auch $\varphi_a = \varphi_I = -\varphi_Z$.

6.5.2 R-C Glied als Tiefpass

Ändert man in der obigen Schaltung die Reihenfolge von Kondensator und Widerstand, so bleibt der Gesamtwiderstand und Strom unverändert. Die Ausgangsspannung fällt über dem Kondensator

(Schrödinger-Gleichung, Dirac-Gleichung) mit komplexen Koeffizienten gelöst werden. Ihre Lösungen, die Wellenfunktionen von Teilchen, sind dann tatsächlich komplexe Funktionen, die physikalisch interpretiert werden müssen.

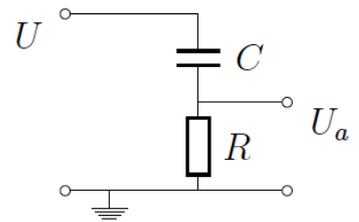


Abb. 6.15
Hochpass aus Widerstand und Kondensator.

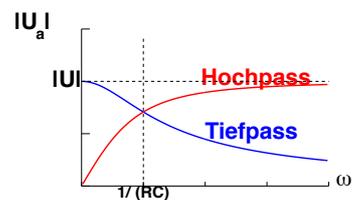


Abb. 6.16
Ausgangsspannung von Hoch- und Tiefpass.

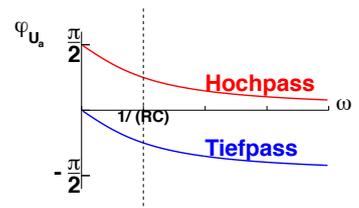


Abb. 6.17
Phase der Ausgangsspannung von Hoch- und Tiefpass.

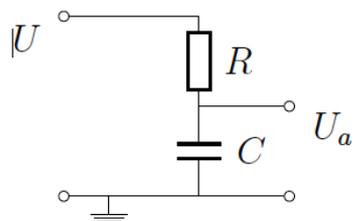


Abb. 6.18
Tiefpass aus Widerstand und Kondensator.

ab,

$$U_a = Z_C I = \frac{Z_C}{Z_{ges}} U = \frac{1/(i\omega C)}{R + 1/(i\omega C)} U$$

so dass die Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

ist. In diesem Fall liegt ein Tiefpass vor, denn der Kondensator schließt hohe Frequenzen gegenüber der Masse kurz.

6.6 Schwingkreise

6.6.1 R-C-L Serienschwingkreis als Frequenzfilter

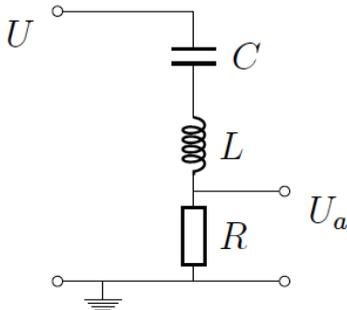


Abb. 6.19 RCL- Reihenschwingkreis.

Die bereits in Gleichung 6.29 angegebene Differentialgleichung hat die gleiche Form wie die Bewegungsgleichung eines Pendels mit Reibung und periodischer Anregung (siehe Mechanik-Vorlesung). Genau wie dort erwartet man also ein Resonanzverhalten.

Der Gesamtwiderstand ist in diesem Fall

$$Z_{ges} = Z_C + Z_L + Z_R = \frac{1}{i\omega C} + i\omega L + R = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Aus C und L lassen sich Größen mit der Dimension einer Frequenz und eines Widerstands konstruieren, die charakteristisch für das Problem sind:

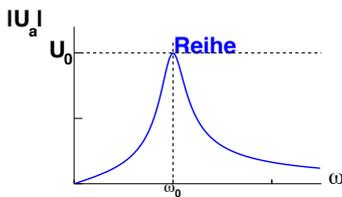


Abb. 6.20 Ausgangsspannung des Reihenschwingkreises für $R_{CL} = 4R$.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad R_{LC} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.30)$$

Damit lässt sich der Imaginärteil von Z_{ges} schreiben als

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = R_{LC} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \quad (6.31)$$

$$|Z_{ges}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + R_{LC}^2 \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}$$

Offenbar wird Z_{ges} minimal bei $\omega = \omega_0$, so dass ω_0 die Resonanzfrequenz ist. Die Ausgangsspannung ist wieder

$$U_a = Z_R I = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U$$

so dass die Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U_{ges}|} = 1 / \sqrt{1 + \frac{R_{LC}^2}{R^2} \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0} \right)^2}$$

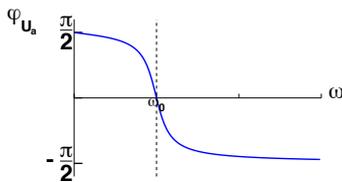


Abb. 6.21 Ausgangsphase des Reihenschwingkreises für $R_{CL} = 4R$.

ein Maximum bei der Resonanzfrequenz ω_0 hat. Bei dieser Frequenz ist das LC -Glied vollständig durchlässig. Die Breite der Resonanzkurve wird so definiert, dass Realteil und Imaginärteil von Z_{ges} gleich groß sind, also

$$\omega_{1,2}L - \frac{1}{\omega_{1,2}C} = \mp R$$

oder

$$\omega_{1,2}^2 LC - 1 = \mp \omega_{1,2} CR$$

Subtrahiert man diese beiden Gleichungen voneinander, so findet man als Breite beziehungsweise relative Breite der Resonanzkurve

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} = \omega_0 \frac{R}{R_{LC}} \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{R_{LC}}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich wegen

$$\tan(\varphi_Z) = \frac{\text{Im}(Z_{ges})}{\text{Re}(Z_{ges})}$$

zu

$$\tan(\varphi_{U_a}) = \tan(-\varphi_Z) = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{R_{LC}}{R} \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0}$$

Auf der Resonanz, bei $\omega = \omega_0$, ist

$$\varphi_{U_a} = 0, \quad Z_{ges} = R, \quad U_a = U$$

6.6.2 R-C-L als Parallelschwingkreis

Für die Parallelschaltung von C und L gilt nach der

- Maschenregel:

$$U_C = U_L$$

- Knotenregel:

$$I = I_L + I_C = \frac{U_L}{Z_L} + \frac{U_C}{Z_C} = U_C \frac{1}{Z'}$$

mit dem rein imaginären Widerstand

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \quad Z' = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C} = \frac{L/C}{i(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Mit den gleichen Definitionen für ω_0 und R_{LC} wie beim Reihenschwingkreis (Gleichung 6.31) folgt

$$Z' = -i R_{LC} \frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Für den Gesamtwiderstand gilt dann

$$|Z_{ges}| = |Z_R + Z'| = \sqrt{R^2 + R_{LC}^2 \left(\frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2}$$

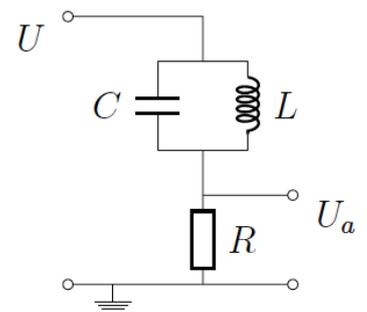


Abb. 6.22
CL- Parallelschwingkreis.

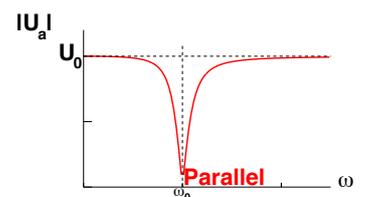


Abb. 6.23
Ausgangsspannung des Parallelschwingkreises für $R = 4R_{CL}$.

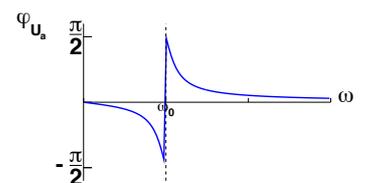


Abb. 6.24
Ausgangsphase des Parallelschwingkreises für $R = 4R_{CL}$.

6.6 Schwingkreise

Offenbar wird der Betrag von Z_{ges} beliebig groß bei der Resonanzfrequenz $\omega = \omega_0$. Die Spannung fällt also auf der Resonanz komplett über dem LC -Glied ab. Aus der Ausgangsspannung des Spannungsteilers folgt als Durchlassfunktion

$$\frac{|U_a|}{|U_{ges}|} = \frac{|Z_R|}{|Z_{ges}|} = 1 / \sqrt{1 + \frac{R_{LC}^2}{R^2} \left(\frac{\omega \omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \right)^2}$$