

Kapitel 9: Optik

9 Optik	85
9.1 Huygens'sches Prinzip	85
9.2 Reflexion und stehende Wellen	86
9.3 Brechung und Totalreflexion	87
9.4 Polarisierung durch Brechung	88
9.5 Dispersion	89
9.6 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit	94
9.7 Linsen und Abbildungen	95
9.8 Kohärenz	97
9.9 Interferenz	98
9.10 Beugung	100
9.11 Dopplereffekte	105



Sir Isaac Newton war ein englischer Naturforscher und Verwaltungsbeamter. In der Sprache seiner Zeit, die zwischen natürlicher Theologie, Naturwissenschaften, Alchemie und Philosophie noch nicht scharf trennte, wurde Newton als Philosoph bezeichnet. [Wikipedia](#)

1643–1727

Isaac Newton porträtiert von [Godfrey Kneller, London 1702](#), Bestand der [National Portrait Gallery](#)

Sir Isaac Newton, kurze Zeit vor seinem Tode

Robert L. Weber
Eric Mendoza

**Kabinett
physikalischer Raritäten**

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

„Ich weiß nicht, als was ich der Welt erscheinen mag, doch mir schein ich nur wie ein Knabe gewesen zu sein, der an der Küste spielt und hin und wieder einen glatteren Kiesel oder eine schönere Muschel als gewöhnlich findet, während doch der große Ozean der Wahrheit gänzlich unentdeckt vor mir lag.“

Sowohl HUYGENS als auch NEWTON haben ein Buch über ihre Arbeiten zur Optik geschrieben, und beide Werke gehören zu den „großen Büchern“ der Wissenschaftsgeschichte. Auch vor ihrem Erscheinen haben beide Bücher ein recht ähnliches Schicksal gehabt. Beide Autoren haben ihre Untersuchungen in den siebziger Jahren begonnen, aber das Erscheinen der Bücher hat sich aus verschiedenen Gründen verzögert. HUYGENS hatte sein Buch zunächst in französischer Sprache verfaßt und dann beabsichtigt, es irgendwann ins Lateinische zu übersetzen, um es einem breiteren Leserkreis zugänglich zu machen, „...aber das beglückende Gefühl der Neuheit verging, und ich schob die Verwirklichung meiner Pläne mehr und mehr hinaus“. Es ist dann schließlich 1691 unter dem Titel *Traité de la lumière* erschienen. NEWTON hat 1672 und 1675 über seine Untersuchungen vor der Royal Society berichtet, wobei er jedoch – vor allem seitens HOOKES – so heftigen Angriffen ausgesetzt gewesen ist, daß er sein Buch erst 1704, ein Jahr nach HOOKES Tod, in englischer Sprache unter dem Titel *Opticks or a Treatise of the Reflections, Refractions and Colours of Light* publiziert hat. Die Arbeiten von HUYGENS und NEWTON sind zeitlich stark miteinander verflochten, und in der Tat beziehen sich beide des öfteren aufeinander. HUYGENS war einer der wenigen, der von NEWTON als Persönlichkeit anerkannt und geachtet worden ist.

Es ist heute üblich, die Wellentheorie des Lichtes mit dem Namen HUYGENS und die Korpuskulartheorie mit dem NEWTONS in Verbindung zu bringen.

Christiaan Huygens, auch Christianus Hugenius, war ein niederländischer Astronom, Mathematiker und Physiker. [Wikipedia](#)

1629–1695

Christiaan Huygens by [Caspar Netscher, Museum Hofwijk, Voorburg](#)



9 Optik

9.1 Huygens'sches Prinzip

In der Optik geht es um das Verhalten elektromagnetischer Wellen in konkreten geometrischen Umgebungen wie Medien (Gase, Glas, ...), Grenzflächen (Spiegel, Linsen) und Begrenzungen (Spalte, Gitter). Die Effekte sind dabei keineswegs auf den Bereich der mit dem Auge erfassbaren optischen Wellenlängen (siehe Abbildung 8.1) beschränkt, sondern beziehen sich auf alle Wellenlängen, solange Quanteneffekte vernachlässigt werden können.

Natürlich ist es aufwendig, konkrete Probleme jedesmal mit den Maxwell-Gleichungen zu behandeln. Man bedient sich daher einfacherer Konstruktionsprinzipien, die man aus grundlegenden Prinzipien oder den Maxwell-Gleichungen ableiten kann.

Experimentell findet man z.B. bei Wasser, Schall und EM-Wellen, dass eine ebene Welle, wenn sie auf einen schmalen Spalt trifft, hinter diesem Spalt als Kugelwelle (Elementarwelle) weiterläuft. Dies gilt, solange die Breite der Spaltöffnung kleiner ist als die Wellenlänge (siehe Abschnitt zum Einzelspalt),

$$d \lesssim \lambda \quad (9.1)$$

Bei dem gleichen Experiment aber mit z.B. acht Spalten sieht man die Überlagerung der acht Kugelwellen. Nach dem Superpositionsprinzip kann man die Amplituden $\vec{A}(\vec{r}, t)$ der acht Kugelwellen einfach addieren. In einem Abstand ($\gg \lambda$ und \gg Spaltabstand) beobachtet man, dass sich diese Elementarwellen zu einer fast ebenen Welle überlagern. Im Limes einer großen Dichte der Ursprungsorte der Kugelwellen ergibt sich tatsächlich eine perfekt ebene Welle.

Wir werden daher ganz allgemein davon ausgehen, dass man optische Effekte aus der Überlagerung von Elementarwellen gleicher Frequenz, Amplitude und Phase konstruieren kann und daraus insbesondere Wellenfronten und damit auch die Richtung der weiterlaufenden Welle konstruieren kann.

Dieses Konstruktionsprinzip ist von großer Bedeutung, wenn die einlaufenden Wellen ebene Wellen sind (**Fraunhofer-Optik**). Es kann aber zum Beispiel auch auf einlaufende Kugelwellen angewandt werden (**Fresnel-Optik**).

Das Huygens'sche Prinzip lässt sich wie angedeutet aus dem Superpositionsprinzip (Linearität der Maxwell-Gleichungen) sowie der Kausalität zwischen Erregerwelle und auslaufender Welle herleiten.

Mathematischer ausgedrückt entspricht eine punktförmige Quelle einer Dirac'schen Delta-Funktion, die ausgehende Kugelwelle der entsprechenden Lösung der Differentialgleichung (Wellengleichung), und die Überlagerung der Kugelwellen dem Greens-Verfahren zur

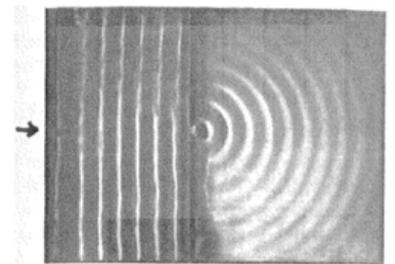


Abb. 9.1
Kugelwelle hinter einem schmalen Spalt (Wasser).

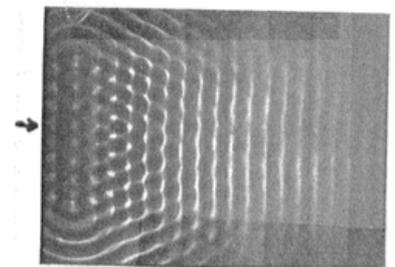


Abb. 9.2
Acht Kugelwellen hinter acht schmalen Spalten (Wasser).

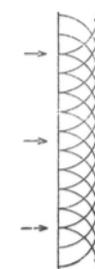


Abb. 9.3
Überlagerung zu einer ebenen Welle nach Huygens.

Lösung von Differentialgleichungen, bei dem über die verschiedenen Dirac-Funktionen integriert wird.

9.2 Reflexion und stehende Wellen

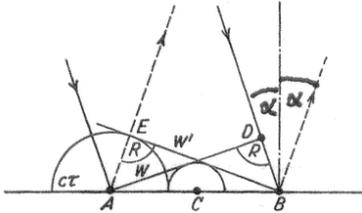


Abb. 9.4
Reflexion nach Huygens.

- Einfallswinkel = Ausfallswinkel

Dies lässt sich auch einfach als elastischer Stoß von Photonen interpretieren. Die Komponente des Photon-Impulses parallel zur Oberfläche bleibt erhalten, die Komponente senkrecht dazu ändert ihr Vorzeichen.

Eine wichtige Anwendung sind gebogene Spiegel. Möchte man z.B. eine einfallende ebene Welle in einem Brennpunkt fokussieren, so muss man die Form einer Parabel (oder eines Paraboloids) wählen, $y = ax^2$. Der Brennpunkt liegt dann im Abstand $f = \frac{1}{4a}$ vom Fußpunkt der Parabel. Da kleine Winkelbereiche von Kreisen (oder Kugeln) eine erste Näherung an eine Parabel darstellen, kann man mit aufgeschnittenen Röhren bereits Licht fokussieren und zur Energiegewinnung nutzen oder Kugelspiegel verwenden für einfache Teleskope.



Abb. 9.5
Foto eines Radioteleskops (Wikipedia).

Stehende Welle

Bei Reflexion um 180° Grad beobachtet man im Experiment, dass sich stehende Wellen ausbilden, d.h. es gibt feste Orte im Raum, bei denen die Amplitude der Welle immer Null ist und andere, bei denen die Amplitude immer maximal ist. Die Summe aus einlaufender (\vec{k} in x-Richtung) und reflektierter Welle ist (E_{10} und E_{20} sind reel)

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_{10} e^{i(\omega t - kx + \varphi_1)} + \vec{E}_{20} e^{i(\omega t + kx + \varphi_2)} \quad (9.2)$$

Steht ein perfekt reflektierender Spiegel bei $x = 0$ und ist aus Metall, so muss dort $\vec{E}(0, t) = 0$ sein für alle t , d.h.¹⁶ $\vec{E}_{10} e^{i\varphi_1} = -\vec{E}_{20} e^{i\varphi_2}$, so dass

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_{10} e^{i(\omega t + \varphi_1)} (e^{-ikx} - e^{+ikx}) = -2i \vec{E}_{10} e^{i(\omega t + \varphi_1)} \sin(kx) \quad (9.3)$$

Für die daraus folgende Intensität

$$I \sim \left(\text{Re}(\vec{E}(x, t)) \right)^2 = 4E_{10}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_1) \sin^2(kx) \quad (9.4)$$

¹⁶Bei einer Reflexion am offenen Ende müsste $\vec{E}(0, t)$ maximal sein. Beispiel wäre eine Seilwelle, bei der das Seil an einem Ende nicht festgehalten wird und dort weit ausschlägt.

Reflexion am festen Ende

folgt im zeitlichen Mittel

$$\langle I \rangle \sim 2E_{10}^2 \sin^2(kx) \tag{9.5}$$

Die Intensitätsminima (bei $kx = 0, \pi, 2\pi, \dots$) wiederholen sich im Abstand $\Delta x = \lambda/2$. Dies ist eine gute Methode, um die Wellenlänge einer Welle direkt zu messen.

Stehende Wellen treten nicht nur bei Reflexion auf, sondern immer dann, wenn Wellen gleicher Frequenz und Wellenlänge in entgegengesetzte Richtung laufen.

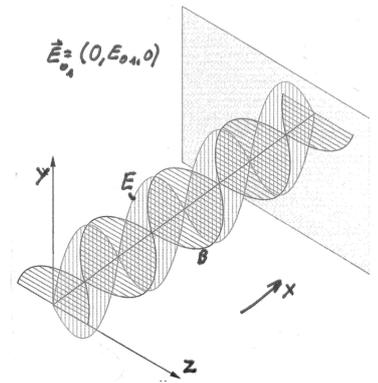


Abb. 9.6
Stehende EM-Welle vor einer Metallplatte. Wegen $\nabla \cdot \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ hat \vec{B} keinen Wellennoten sondern einen Wellenbauch bei $x = 0$.

9.3 Brechung und Totalreflexion

Tritt ein Lichtstrahl aus Luft oder Vakuum in ein Glas ein, so beobachtet man eine Ablenkung des Lichtstrahls und damit der Wellenfronten gleicher Phase. Genauer betrachtet wird der Strahl

- teilweise gebrochen
- teilweise reflektiert
- teilweise absorbiert

Die Brechung im Glas muss im Rahmen der Huygens'schen Prinzips bedeuten, dass die Phasengeschwindigkeit in Glas kleiner ist als in der Luft oder im Vakuum¹⁷.

Die Strecken \overline{DB} und \overline{AC} legt das Licht in gleichen Zeiten τ zurück, $c_1\tau = \overline{DB}$, $c_2\tau = \overline{AC}$. Misst man Einfallswinkel α_1 und Ausfallswinkel α_2 der Lichtstrahlen relativ zur Senkrechten auf die Grenzfläche, so findet man

$$\overline{AB} = \frac{c_1\tau}{\sin \alpha} = \frac{c_2\tau}{\sin \beta} \tag{9.6}$$

so dass

$$\boxed{\frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2}} \tag{9.7}$$

Empirisch definiert man einen (reellen) Brechungsindex

$$\boxed{n_i = \frac{c}{c_i}} \tag{9.8}$$

und schreibt das Brechungsgesetz in der Form

$$\boxed{n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2} \tag{9.9}$$

Man kann die Richtung des Lichtstrahls auch umdrehen. Offensichtlich hat diese Gleichung aber keine interpretierbare Lösung, wenn $\sin \alpha_i > 1$ herauskommen müsste. Dies wird passieren, wenn der Lichtstrahl vom optisch dichteren Medium i (n_i groß) in das

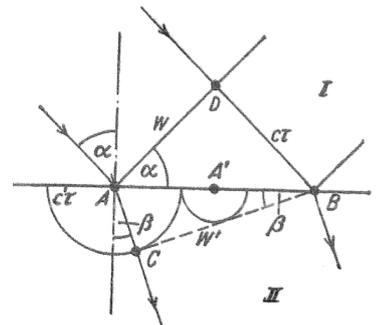


Abb. 9.7
Lichtbrechung nach Huygens (mit $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \beta$, sonst wie im Text).

Snellius'sches Brechungsgesetz

¹⁷Tatsächlich kann man dies mit genauen Messungen auch direkt feststellen.

optisch dünnere Medium j (n_j klein) eintritt, also $n_i > n_j$, und der Einfallswinkel α_i größer wird als

$$\frac{n_i}{n_j} \cdot \sin \alpha_i > 1 \quad (9.10)$$

Totalreflexion

Diese Totalreflexion wird technisch in Lichtleitern ausgenutzt, um Lichtverluste zu vermeiden.

9.4 Polarisierung durch Brechung

Da für eine freie EM-Welle die Beziehung $E_0 = cB_0$ gilt, folgt für Ladungsträger mit Geschwindigkeit $v \ll c$ nahe der Oberfläche eines Materials

$$\underbrace{qE}_{\text{Kraft durch E}} \gg \underbrace{qvB = q \frac{v}{c} E}_{\text{Kraft durch B}} \quad (9.11)$$

Da außerdem die Elektronen sehr viel leichter und beweglicher sind als die Kerne, reicht es zumindest im optischen Wellenlängenbereich, die Wirkung des E -Feldes auf Elektronen zu betrachten. Das \vec{E} -Feld einer EM-Welle wird also Elektronen zu Schwingungen in Richtung \vec{E} anregen. Diese Dipole strahlen dann eine \vec{E} -Welle entsprechend der Dipol-Charakteristik ab. Daraus folgt

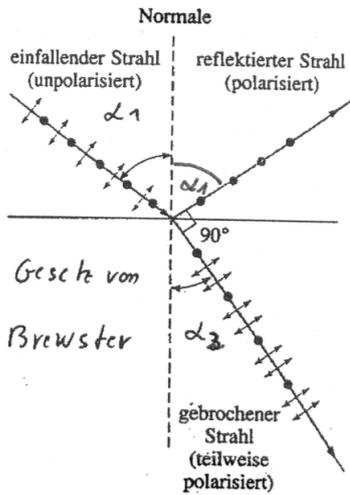


Abb. 9.8
Polarisierung durch Brechung.

- Die Komponente des \vec{E} -Feldes parallel zur Oberfläche wird Dipole anregen, die sowohl in das Medium hinein (Brechung) als auch wieder zurück strahlen können (Reflexion).
- Die andere Vektor-Komponente des \vec{E} -Feldes wird Dipole anregen, die je nach Winkel α_1 kaum noch Energie in die Richtung der reflektierten Welle abstrahlen kann.

Damit wird also diese Komponente der Polarisation des \vec{E} -Feldes kleiner sein, das reflektierte Licht ist zumindest teilweise polarisiert¹⁸. Insbesondere wenn der Winkel zwischen gebrochenem Strahl und reflektiertem Strahl die Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \tan \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \quad (9.12)$$

erfüllt, ist der reflektierte Strahl vollständig polarisiert. Diesen Winkel, bei dem für einfallendes unpolarisiertes Licht ausschließlich die senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Anteile reflektiert werden, nennt man Brewster-Winkel. Durch zwei in rechtem Winkel zueinander angeordnete Spiegel kann man also Licht vollständig auslöschen, wenn beide Spiegel im Brewster-Winkel angeordnet sind.

¹⁸Auch die Polarisation des Sonnenlichts beruht auf diesem Effekt.

9.5 Dispersion

Experimentell kann man recht leicht mit einem dreieckigen Glaskörper beobachten, dass das Licht normaler Lampen oder der Sonne in verschiedene Farben getrennt werden kann. Dies bedeutet, dass der Brechungsindex und damit die Lichtgeschwindigkeit von der Frequenz oder Wellenlänge des Lichts abhängen muss.

$$n = n(\lambda) \quad \text{und} \quad n = n(\omega) \quad (9.13)$$

Für das in das Prisma einfallende und austretende Licht gilt

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad n_2 \sin \beta_2 = n_1 \sin \beta_1 \quad (9.14)$$

Außerdem ist $\alpha_2 + \beta_2 = \gamma$ und der gesamte Winkel der Ablenkung ist $\delta = \alpha_1 + \beta_1 - \gamma$. Man kann daher das Prisma so drehen, dass die Ablenkung δ minimal wird und erhält in diesem Fall

$$\sin \frac{\delta_{\min}}{2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \quad (9.15)$$

Damit kann man also leicht den Brechungsindex messen, ohne die Winkel im Prisma kennen zu müssen.

Beispielsweise erhält man für Quarzglas

$\frac{\lambda}{\text{nm}}$	Farbe	n
480	blau	1,464
650	rot	1,456

Man findet damit experimentell:

- Weißes Licht ist eine Überlagerung aus allen Frequenzen im Bereich der Empfindlichkeit der Sehnerven,
- Die Intensität $I(\omega)$ einer Lichtquelle ist bestimmt durch ihre Temperatur (Strahlung eines "schwarzen Körpers") sowie durch die chemischen Elemente (Spektrallinien). Beide Bestandteile können genauer erst im Rahmen der Quantenmechanik erklärt werden.

Dispersion

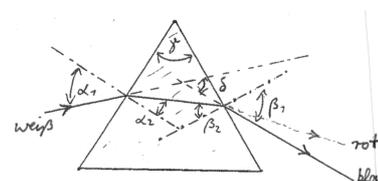


Abb. 9.9
Messung der Dispersion durch ein Prisma.

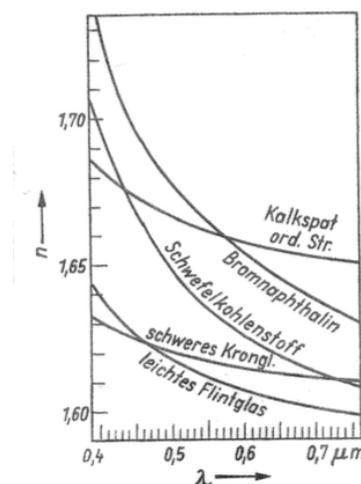


Abb. 9.10
Brechungsindex n als Funktion der Wellenlänge im Vakuum.

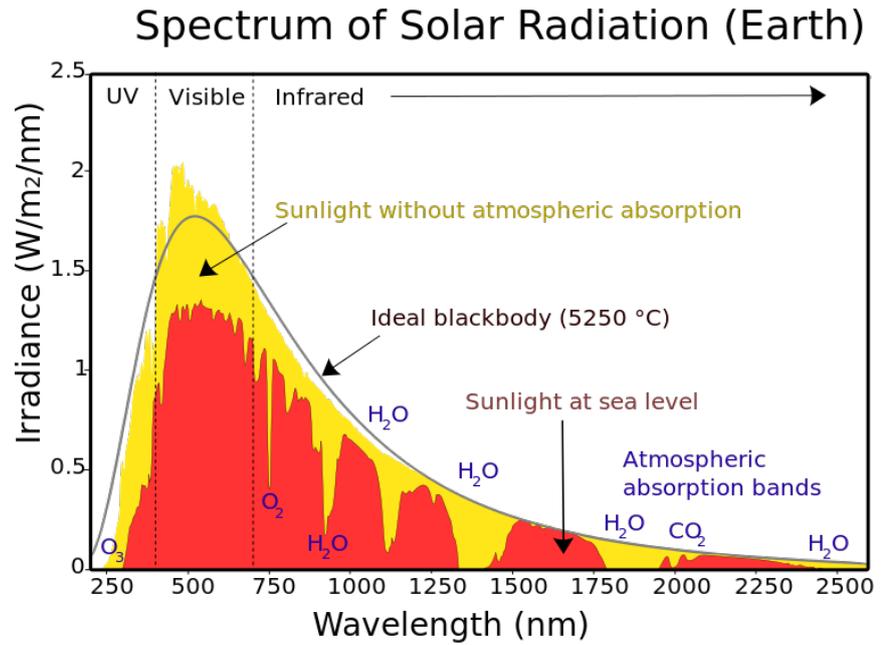


Abb. 9.11 Intensität des Sonnenlichts mit und ohne Absorption in der Atmosphäre (Wikipedia).

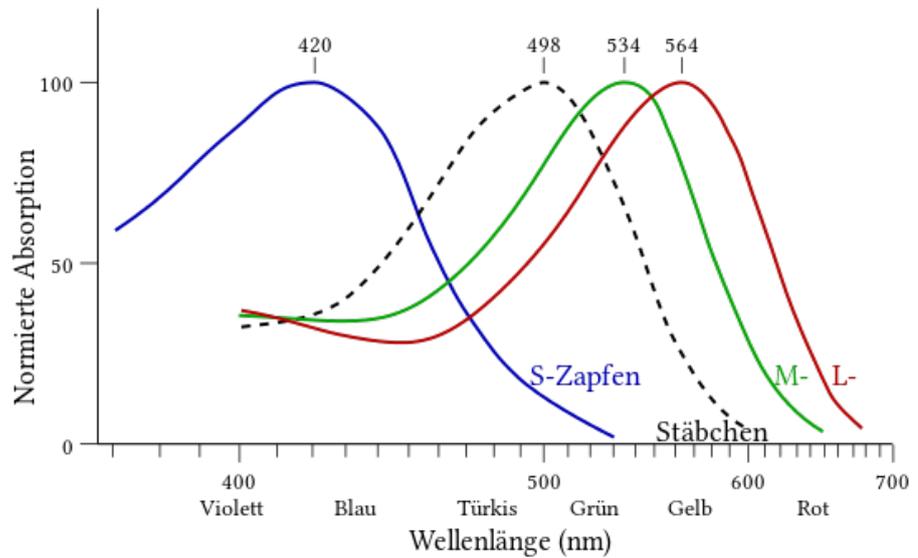


Abb. 9.12 Empfindlichkeit der Rezeptoren im Auge (Wikipedia).

Wenn eine EM-Welle auf eine Grenzschicht trifft, wird die Anregungsfrequenz ω auch im Material vorliegen, die Phasengeschwindigkeit c und damit k werden sich ändern,

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \Rightarrow \quad c_1 k_1 = c_2 k_2 \quad (9.16)$$

Relativ zum Vakuum folgt also

$$k = n(\omega) \cdot k_{\text{Vak}} = n(\omega) \cdot \frac{\omega}{c} \quad (9.17)$$

Damit ist die Welle im Material

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - n(\omega) \frac{\omega}{c} x)} \quad (9.18)$$

Um Absorption beschreiben zu können, führen wir einen komplexen Brechungsindex ein,

$$n(\omega) = n_{Re}(\omega) + i \cdot n_{Im}(\omega) \quad (9.19)$$

Damit ist

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - n_{Re} \frac{\omega}{c} x)} \cdot e^{n_{Im} \frac{\omega}{c} x} \quad (9.20)$$

Die Intensität der Welle ist also gedämpft mit der exponentiellen Eindringtiefe $\alpha(\omega)$,

$$I(\omega) = I_0 e^{-\alpha(\omega)x} \quad \alpha(\omega) = -2 \cdot n_{Im}(\omega) \cdot \frac{\omega}{c} \quad (9.21)$$

Dies ist der Grund, warum manche Stoffe durchsichtig erscheinen (α klein) oder eben nicht.

Wellen in Materie

In den Maxwell-Gleichungen für Materie (Gl. 7.3) sind die Dipole bereits in Form der relativen Dielektrizitätskonstante ϵ_r kodiert. Für diese Gleichungen findet man die Wellengleichung

$$\partial_t^2 \vec{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} \nabla^2 \vec{E} = 0 \quad (9.22)$$

so dass

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} \quad (9.23)$$

In nicht ferromagnetischen Stoffen ist $\mu_r \approx 1$, so dass der Brechungsindex durch

$$n \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad (9.24)$$

bestimmt ist. Damit muss auch ϵ_r komplex sein. Dies kann man mit Hilfe des Oszillator-Modells verstehen.

Oszillator-Modell

Aufgrund einer äußeren primären EM-Welle der Kreisfrequenz ω folgen die Elektronen des Materials in einer dünnen Schicht (Dicke $\ll \lambda$) einer erzwungenen harmonischen Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfung τ , (hier für $\vec{E} = (0, E_y, 0)$)

$$\ddot{y} + \frac{1}{\tau} \dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{q}{m_e} E_0 e^{i\omega t} \quad (9.25)$$

mit der Lösung für die Auslenkung $y(t)$ der Elektronen um ihre Ruhelage

$$y(t) = \frac{q}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \cdot E_0 e^{i\omega t} \quad (9.26)$$

$$= \frac{q}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \cdot E_0 e^{i\omega t} \quad (9.27)$$

$$= \frac{q}{m_e} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \cdot E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (9.28)$$

mit

$$\tan \varphi = -\frac{\omega/\tau}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (9.29)$$

Die Dipolmomente $q \cdot y(t)$ sind also um φ phasenverschoben gegenüber der Primärwelle. Die angeregten Dipole strahlen gemäß den Gleichungen des Hertz'schen Dipols eine sekundäre EM-Welle ab. Diese ist, am Ort der Dipole, in Phase¹⁹ mit der Auslenkung $y(t)$. Damit ist auch die gesamte Sekundärwelle phasenverschoben um φ gegenüber der Primärwelle.

Sowohl die Primärwelle als auch die Sekundärwelle bewegen sich mit Vakuumlichtgeschwindigkeit durch das Medium. Die beiden Feldstärken addieren sich aber, so dass die gesamte Feldstärke eine Phasenverschiebung hat, die zwischen Null und φ liegt. Diese Phasenverschiebung zwischen Primärwelle und Sekundärwelle ist der Grund, warum die Maxima der gesamten EM-Welle für $\omega < \omega_0$ scheinbar langsamer vorankommen, die Phasengeschwindigkeit des Lichts im Medium also gegenüber dem Vakuum verändert ist.

Integriert man alle (retardierten) elektrischen Felder, die von den Dipolen (Dichte der Dipole N) in der Schicht Δx erzeugt werden, so erhält man

$$E_D(x) = -i\omega \frac{\Delta x}{c} \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m ((\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega/\tau)} \quad (9.30)$$

Den Zusammenhang mit dem Brechungsindex im Medium erhält man, indem man eine ebene Welle betrachtet, die sich mit Geschwindigkeit $c' = c/n$ durch die Schicht Δx bewegt. Wie in Gl. 9.17 gilt $\omega = \omega'$ und $k' = nk$. Die Phase dieser Welle ist dann

$$\begin{aligned} \omega \left(t - \frac{\Delta x}{c'} \right) &= \omega t - k' \Delta x \\ &= \omega t - k \Delta x - (k' \Delta x - k \Delta x) \\ &= \omega t - k \Delta x - k \Delta x (n - 1) \end{aligned} \quad (9.31)$$

Handelt es sich um ein optisch dünnes Medium, d.h. für den letzten Ausdruck gilt

$$k \Delta x (n - 1) = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda} (n - 1) \ll 2\pi \quad (9.32)$$

so folgt für die ebene Welle approximativ

$$E(x) = E_0 e^{i(\omega t - k' \Delta x)} \approx E_0 e^{i(\omega t - k \Delta x)} \cdot (1 - i k \Delta x (n - 1)) \quad (9.33)$$

Der erste Faktor entspricht gerade der ungestörten Welle, der 2. Ausdruck dem Beitrag der Dipolmomente aus Gl. 9.30. Damit erhalten wir, nach n aufgelöst, schließlich

$$n(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega/\tau} \quad (9.34)$$

¹⁹Das 2-fache Kreuzprodukt in Gl. 8.38 ergibt ein Vorzeichen, das vom Faktor $-\omega^2$ durch die zweifache Ableitung kompensiert wird.

oder

$$n(\omega) = 1 + \frac{q^2 N}{2\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega/\tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega/\tau)^2} \quad (9.35)$$

Das Oszillatormodell beschreibt daher

- einen komplexen Brechungsindex, der von der Dipoldichte N abhängt und Absorption beschreibt,
- eine Ausbreitungsgeschwindigkeit, die vom Unterschied zwischen Anregungsfrequenz und Resonanz-Eigenfrequenzen des Materials abhängt,
- die optischen Eigenschaften eines Materials, die aus der Summe der Effekte durch verschiedene Eigenschwingungen folgen.

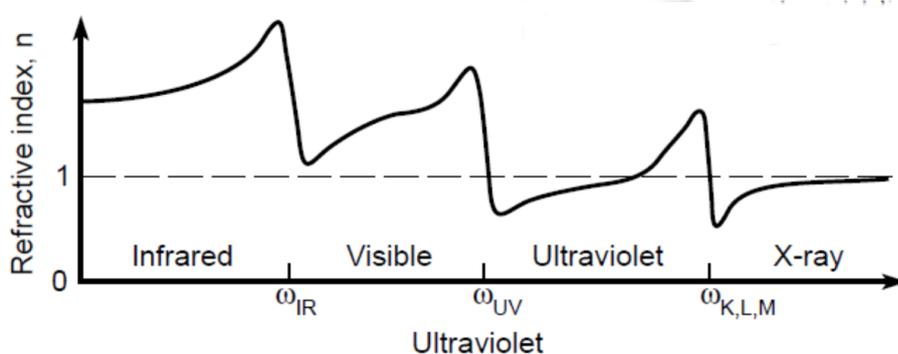


Abb. 9.13 Brechungsindex als Funktion der Frequenz für ein Material mit drei verschiedenen Eigenfrequenzen (Atwood).

Damit ergibt sich je nach Material und Frequenz folgendes Bild der Überlagerung von Primär und Sekundärwelle:

- Bereiche, in denen die Steigung positiv ist, $\partial n/\partial\omega > 0$, werden historisch als Bereiche normaler Dispersion bezeichnet.
- Bereiche nahe der Resonanzen, in denen die Steigung negativ ist, $\partial n/\partial\omega < 0$, werden ebenso als Bereiche anomaler Dispersion bezeichnet.
- In weiten Bereichen (vor allem der normalen Dispersion) ist die Phasengeschwindigkeit c' kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

$$n > 1 \quad \Rightarrow \quad c' < c_{\text{Vak}}$$

- Nahe der Resonanzen kann $n < 1$ werden, die Phasengeschwindigkeit größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

$$n < 1 \quad \Rightarrow \quad c' > c_{\text{Vak}}$$

- Für $\omega \approx \omega_0$ ist der Imaginärteil von n sehr groß, die Welle wird sehr stark absorbiert. In diesen Bereichen ändert sich c' sehr schnell als Funktion der Frequenz.

9.6 Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Dass Geschwindigkeiten größer als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum werden können, ist interessant durch die Implikationen für die spezielle Relativitätstheorie, die ja annimmt, dass sich Signale nicht schneller ausbreiten können als mit c_{Vak} .

Die Phasengeschwindigkeit einer perfekten harmonischen Welle ist aber kein Maß für die Ausbreitung eines Signals. Ein Signal muss zunächst einmal angeschaltet werden, ist also nicht periodisch und daher immer eine Summe von Frequenzen (nach Fourier-Zerlegung). Für die Ausbreitung von Signalen ist in vielen Fällen die Gruppengeschwindigkeit c_g ein besseres Maß.

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c}{n + \omega \frac{\partial n}{\partial \omega}} \quad (9.36)$$

Der letzte Term folgt aus $n = c \cdot k / \omega$ und der Bildung von $\partial n / \partial \omega$. Diese Gruppengeschwindigkeit ist in vielen Fällen interpretierbar als die Geschwindigkeit einer Einhüllenden einer modulierten Welle. Z.B. ergibt sich bei der Addition zweier Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenzen $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \Delta\omega$ und Wellenzahlen $k_{1,2} = k_0 \pm \Delta k$,

$$\begin{aligned} e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} &= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot (e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)} + e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)}) \\ &= e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta k x) \end{aligned} \quad (9.37)$$

dass die Gruppengeschwindigkeit

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \approx \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (9.38)$$

die Geschwindigkeit der Einhüllenden der Welle darstellt, die die Welle der Phasengeschwindigkeit $c' = \frac{\omega_0}{k_0}$ in der Amplitude moduliert.

Diese Interpretation der Gruppengeschwindigkeit ist aber nicht allgemein gültig, denn c_g kann ebenfalls größer als c_{Vak} werden und sogar negative Werte sind möglich. Da dies immer verbunden ist mit der Nähe zu einer Resonanz und daher entsprechend starker Absorption und gleichzeitigem Auseinanderlaufen benachbarter Frequenzen durch die starke Dispersion, erfolgt auch hier kein Signaltransport mit Geschwindigkeiten $> c_{\text{Vak}}$.

Ebenso gilt, dass Photonen sich nur mit maximal Vakuumlichtgeschwindigkeit bewegen.

Schwebung

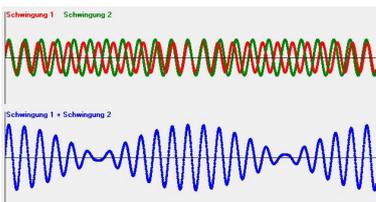


Abb. 9.14
Bild einer Schwebung.

9.7 Linsen und Abbildungen

Ganz allgemein dienen Linsen, Spiegel, etc., zur Abbildung von Objekten.

Im Folgenden beschränken wir uns auf ebene Wellen (Fraunhofer-Optik) und nehmen an, dass die Wellenfronten viel breiter sind als die Wellenlänge und dass Beugung an den Rändern der optischen Geräte vernachlässigt werden kann.

Weiter beschränken wir uns auf "Paraxiale Strahlen", bei denen die Winkel α zwischen Wellenvektoren und optischer Achse der Instrumente klein sind und auch die räumlichen Abstände r zur optischen Achse klein sind. Dann kann man jeweils $\sin \alpha \approx \alpha$ und $\tan \alpha \approx \alpha$ nähern. Diese lineare Näherung erlaubt es, Abbildungen als lineare Gleichungssysteme (Matrizen) zu schreiben. Dann kann ein Lichtstrahl an jeder Ebene senkrecht zur optischen Achse beschrieben werden durch den Winkel α und den Abstand r zur Strahlachse. In der sogenannten Matrizenoptik ist dann der "Vektor" des Lichtstrahls

$$\text{Lichtstrahl} = \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \quad (9.39)$$

Eine optische Abbildung ist

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \quad (9.40)$$

Für einen Strahl, der sich ohne optische Elemente über einen Abstand d ausbreitet, gilt z.B.

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_d} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ r + d \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad (9.41)$$

Die Matrix \mathcal{M} kann aber auch Brechung oder eine Linse charakterisieren.

Linse

An einer Halbkugel mit Radius R_1 gilt für die Abbildung das Brechungsgesetz in linearer Näherung

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad n_1 \alpha_1 \approx n_2 \alpha_2$$

Für einen parallel zur optischen Achse einfallenden Strahl läuft der Strahl durch den Brennpunkt

$$\frac{h}{f_1} \approx \alpha_1 - \alpha_2 \approx \alpha_1 \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

Für die Brennweite f_1 folgt

$$\boxed{f_1 = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R_1} \quad (9.42)$$

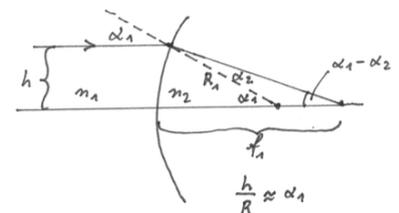


Abb. 9.15
Abbildung an einer Halbkugel.

In diesem Fall ist in der "Ebene" der brechenden Fläche $h = r = r'$, so dass

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} n_1/n_2 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_K} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \quad (9.43)$$

Kombiniert man zwei Halbkugeln zu einer idealisiert dünnen Linse, so muss man nacheinander die beiden entsprechenden linearen Abbildungen ausführen, d.h. die Matrizen in der richtigen Reihenfolge multiplizieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} &= \mathcal{M}_{K+} \cdot \mathcal{M}_{K-} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n_1/n_2 & -1/f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_2/n_1 & -1/f_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9.44)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ r' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1/f \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}_L} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ r \end{pmatrix} \quad (9.45)$$

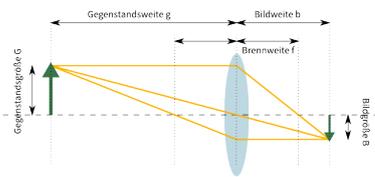
mit

$$f = \frac{1}{n_2/n_1 - 1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (9.46)$$

Mit dieser Methodik der Matrizenoptik folgt auch aus

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{d=b} \cdot \mathcal{M}_L \cdot \mathcal{M}_{d=g} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.47)$$

die bekannte Abbildungsgleichung einer Linse mit Gegenstandsweite g und Bildweite b



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (9.48)$$

Für eine Anordnung von zwei Linsen im Abstand d ist demnach

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{L2} \cdot \mathcal{M}_d \cdot \mathcal{M}_{L1} \quad (9.49)$$

Abb. 9.16
Abbildung mit einer sammelnden dünnen Linse.

Damit kann man auch komplexe Systeme durch lineare Gleichungen behandeln. Dieses Verfahren findet auch in Beschleunigern Verwendung, bei denen magnetische Linsen elektrisch geladene Teilchen fokussieren.

Fehler von Abbildungen

Bei Abbildungen von optischen Geräten entstehen verschiedene Fehler relativ zu dem oben beschriebenen Verhalten.

- Chromatische Fehler entstehen vor allem durch Lichtbrechung, denn Brechungsindizes sind Funktionen der Frequenz, $n(\omega)$. Dadurch ist auch die Brennweite abhängig von der Farbe des Lichts und weißes parallel einfallendes Licht wird durch eine Linse kontinuierlich entlang der optischen Achse fokussiert. Man kann die Abbildungsfehler durch Kombination mehrerer Linsen hintereinander reduzieren.
- Achsenferne Strahlen und solche mit großem Einfallswinkel werden aufgrund der linearen Näherungen nicht korrekt abgebildet, es entstehen Verzerrungen des Bildes. Dies gilt für Spiegel und Linsen, die nicht der perfekten Form (Parabolspiegel und Rotationsellipsoid) folgen, sondern z.B. sphärische (kugelförmige) Oberflächen haben. Entwickelt man die perfekte Form in einer Taylor-Reihe, so ist die lineare Näherung nur der erste Term. Höhere Terme können benutzt werden, um Abbildungsfehler zu analysieren.
- Insbesondere das menschliche Auge weist andere Fehler auf wie z.B. Astigmatismus. Dieser entsteht durch eine stärkere Wölbung der Augenlinse in einer Richtung, so dass einfallendes paralleles Licht nicht in einem Punkt sondern auf eine Linie abgebildet wird.

Weitere Fehler entstehen durch die Begrenzung der Optik (siehe Beugung).

9.8 Kohärenz

Die Überlagerung (Interferenz) von EM-Wellen führt zu zahlreichen wichtigen Effekten in der Natur und Technik. Interferenz ist und war auch zentral zum Verständnis des Welle-Teilchen-Dualismus in der Quantenmechanik.

Bei der Überlagerung zweier Wellen gilt immer (für reelle \vec{E})

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (9.50)$$

$$\begin{aligned} I_{ges} &= c \epsilon_0 \vec{E}_{ges}^2 = c \epsilon_0 (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)^2 = c \epsilon_0 (\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2 + 2\vec{E}_1 \vec{E}_2) \\ &= I_1 + I_2 + \underbrace{2 c \epsilon_0 \vec{E}_1 \vec{E}_2}_{\text{Interferenzterm}} \end{aligned} \quad (9.51)$$

Nun misst man in der Optik zumeist Intensitäten $\langle I \rangle$, die an festen Orten über große Zeiten ($\gg T$) gemittelt sind. Bei gleicher Wellenlänge und Frequenz ist diese Mittelung für den Ausdruck

$$\vec{E}_1 \vec{E}_2 \sim \cos(\omega t - kx) \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

nur dann ungleich Null, wenn der Phasenunterschied φ zeitlich konstant ist. Man unterscheidet daher zwischen

- inkohärenter Überlagerung, $I_{ges} = I_1 + I_2$

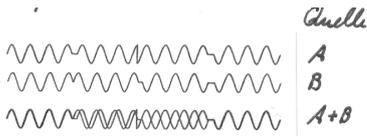


Abb. 9.17

Überlagerung zweier inkohärenter Quellen.

- kohärenter Überlagerung, $I_{ges} = I_1 + I_2 + \text{Interferenzterm}$

In fast allen Lichtquellen tragen viele Atome gleichzeitig unabhängig voneinander zur Strahlung bei. Zwei solche Lichtquellen sind daher nicht kohärent, ihre Intensitäten addieren sich einfach. Es gibt zwei Möglichkeiten, trotzdem Interferenz zu beobachten.

- Man kann den Lichtstrahl durch einen Spalt laufen lassen, um eine möglichst punktförmige Quelle zu erzeugen. Dann teilt man den Lichtstrahl, lässt ihn unterschiedliche Wege laufen und überlagert ihn dann wieder mit sich selber. Der Unterschied zwischen den beiden Laufzeiten,

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{c'} = \frac{n \Delta x}{c} \quad (9.52)$$

muss dann allerdings kleiner sein als die Kohärenzzeit der Lichtquelle. Je nach Dauer der Emmission findet man für die Kohärenzzeit τ und die entsprechende Kohärenzlänge $c\tau$

- freies Atom: $\tau \approx 10^{-8} \text{ s} \Rightarrow c\tau \approx 3 \text{ m}$,
- heißer Körper: $\tau \approx 10^{-10} \text{ s} \Rightarrow c\tau \approx 0,03 \text{ m}$.

- In einem Laser findet induzierte Emmission statt, d.h. Licht der Frequenz ν regt andere Atome zur Abstrahlung von Licht gleicher Frequenz ν mit gleicher Phasenlage an. Die Kohärenzlänge kann dann viele km betragen.

Im Folgenden werden wir immer von hinreichend kohärenten Lichtquellen ausgehen.

9.9 Interferenz

9.9.1 Interferenz an planparallelen Platten

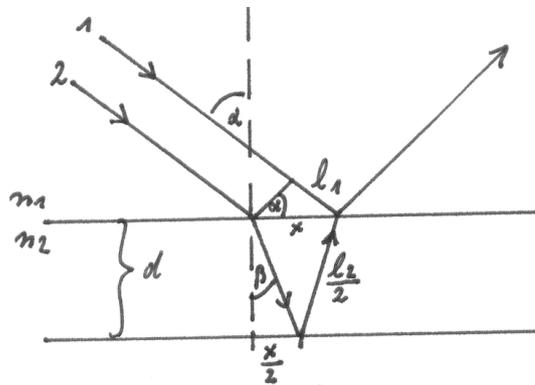


Abb. 9.18 Interferenz an ebenen Platten im Abstand d .

Bei einer ebenen Welle sind die Strahlen 1 und 2 gleichphasig. Mit

$$\frac{l_1}{x} = \sin \alpha \quad \frac{x}{l_2} = \sin \beta \quad \frac{x/2}{d} = \tan \beta$$

und dem Brechungsgesetz $n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta$ folgt für den Zeitunterschied nach Beugung und Reflexion

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l_2}{c_2} - \frac{l_1}{c_1} = \frac{1}{c} (n_2 l_2 - n_1 l_1) \quad (9.53)$$

Der optische Gangunterschied ist dann

$$c \cdot \Delta t = x \cdot \left(\frac{n_2}{\sin \beta} - n_1 \sin \alpha \right) = 2n_2 d \cos \beta \quad (9.54)$$

$$= 2d \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha} \quad (9.55)$$

Da sich ausserdem ein Phasensprung bei Reflexion am optisch dichteren Medium ergibt, folgt für die Phasendifferenz

$$\Delta \varphi = 2\pi \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} - \pi \quad (9.56)$$

Damit erhält man

- Maximum der Intensität bei $\Delta \varphi = m \cdot 2\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$
- Minimum der Intensität bei $\Delta \varphi = (m + \frac{1}{2}) \cdot 2\pi$, $m = 0, 1, 2, \dots$

9.9.2 Michelson-Morley Experiment

Hierbei wird ein Strahl an einem halbdurchlässigen Spiegel aufgespalten und an zwei Spiegeln reflektiert. Am halbdurchlässigen Spiegel entsteht deshalb ein Interferenzbild, das wegen der ‘‘Zylindergeometrie’’ wieder Kreise ergibt. Es handelt sich also auch wieder um Interferenz an planparallelen Platten. Wegen der kleinen Winkel zur Strahlachse ist dies ein sehr empfindliches Instrument zur Messung von Längenunterschieden. Bei exakt gleichen optischen Weglängen sind die innersten Ringe farbig, denn die Maxima und Minima treten bei unterschiedlichen λ an verschiedenen Stellen auf.

Historisch wurde mit diesem Experiment der Äther als Medium der EM-Wellen ausgeschlossen, denn bei verschiedenen Orientierungen der Weglängen zum Geschwindigkeitsvektor der Erde durch den Äther sollte die Lichtgeschwindigkeit unterschiedlich sein und damit die Ringe wandern. Dies wurde aber nicht beobachtet.

Heute werden Michelson-Morley Interferometer verwendet, um nach der Wirkung von Gravitationswellen auf die Weglängen im Interferometer zu suchen (Effekt der allgemeinen Relativitätstheorie). Da die Effekte klein sind, benötigt man kilometerlange Arme des Interferometers und hofft dadurch empfindlich auf Längenänderungen von ca 10^{-18} m zu werden.

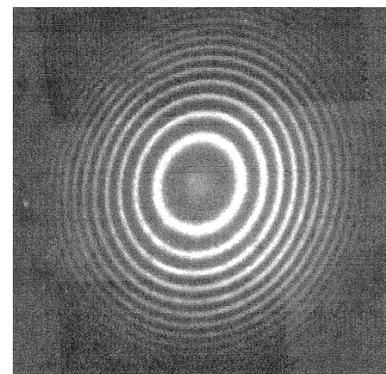


Abb. 9.19
Interferenz an planparallelen Platten.

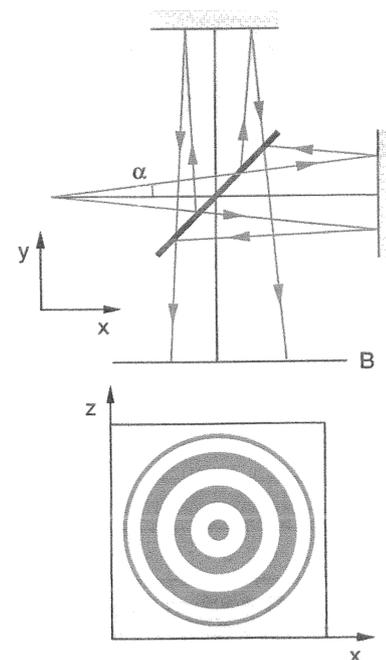


Abb. 9.20
Das Michelson-Morley Experiment.

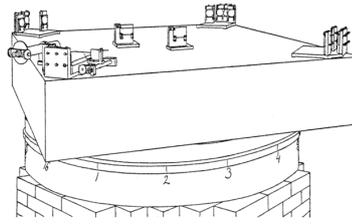


Abb. 9.21 Aufbau des Original Michelson-Morley Experiments von 1887 mit einer massiven Granitplatte in einem Quecksilberbad (Wikipedia).

9.10 Beugung

Bisher sind wir von der Idealisierung ebener Wellen mit einer unendlich ausgedehnten Wellenfront ausgegangen. Dies ist natürlich so nicht realisierbar. Ganz im Gegenteil stellt man fest, dass jede geometrische Begrenzung einer Welle zu Interferenzmustern führt. Beispiele für solche Begrenzungen sind

- störende Gegenstände in einem Lichtstrahl
- Blenden zur Eingrenzung eines Lichtstrahls oder zur Abschirmung von störenden Lichtquellen
- der Rand von Linsen oder von Spiegeln
- Spalte und Gitter

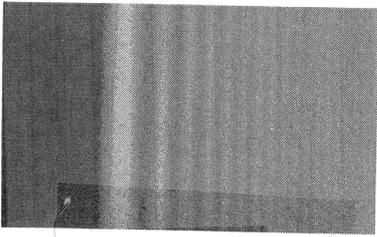


Abb. 9.22 Beugungsbild an einer scharfen Kante.

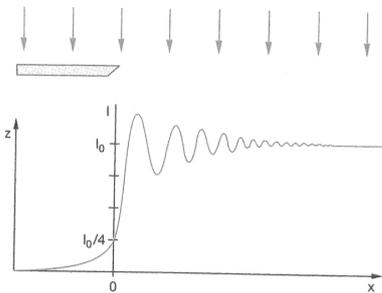


Abb. 9.23 Intensität bei der Beugung an einer scharfen Kante.

Insbesondere bei Kameras, Mikroskopen oder Teleskopen sind solche Begrenzungen unvermeidbar und verhindern, dass eine unendlich gute Auflösung sehr kleiner oder sehr entfernter Objekte erreicht werden kann. Andererseits kann man durch Spalte und Gitter sehr aufschlussreiche und präzise Experimente realisieren.

Bei der Erklärung dieser Phänomene beschränken wir uns wieder auf Fraunhofer-Beugung, bei der sowohl die (kohärente) Lichtquelle als auch das Messinstrument (Auge, Bildschirm) so weit vom beugenden Objekt entfernt sind, dass man von ebenen Wellenfronten ausgehen kann. Wir werden sehen, dass diese Abstände insbesondere viel größer als die Ausdehnung der beugenden Elemente und auch als die Wellenlänge sein müssen. Insbesondere reicht es, die Winkelabhängigkeit der ausgehenden ebenen Wellen zu analysieren, denn durch Linsen lassen sich daraus scharfe Abbildungen machen. Außerdem nehmen wir monochromatisches Licht an, denn entsprechend der Fourier-Analyse kann jede Beugungserscheinung mehrerer Frequenzen aus der Supersposition der Beugungserscheinung der Fourier-Komponenten konstruiert werden.

9.10.1 Doppelspalt mit kleiner Spaltbreite

Betrachtet man einen Doppelspalt, bei dem die Breite der Spalte sehr klein ist im Vergleich zur Wellenlänge (siehe Einzelspalt unten) und insbesondere sehr viel kleiner als der Spaltabstand d , so gehen nach dem Huygens'schen Prinzip Kugelwellen von den Spaltöffnungen aus, die bei einem Winkel θ einen Wegunterschied

$$r_2 - r_1 = d \sin \theta \tag{9.57}$$

und damit eine Phasendifferenz

$$\phi = k \cdot (r_2 - r_1) = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta \tag{9.58}$$

aufweisen. Konstruktive Interferenz ist zu erwarten, wenn der Gangunterschied gerade ein Vielfaches der Wellenlänge ist, also bei

$$r_2 - r_1 = m \cdot \lambda \quad \text{für } m = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots \tag{9.59}$$

Die Intensitätsverteilung erhält man aus der Interferenz der beiden Kugelwellen,

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \frac{1}{r_1} e^{i(\omega t - kr_1)} + E_0 \frac{1}{r_2} e^{i(\omega t - kr_2)} \tag{9.60}$$

Für große Entfernungen (Fraunhofer-Beugung) ist

$$r_{1,2} \gg d, \quad r_1 \approx r_2 \approx r \tag{9.61}$$

und damit²⁰

$$E \approx E_0 \frac{1}{r} e^{i\omega t} (e^{-ikr_1} + e^{-ikr_2}) \tag{9.62}$$

$$= E_0 \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr_2)} (1 + e^{ik(r_2 - r_1)}) = E_2 (1 + e^{i\phi}) \tag{9.63}$$

$$= 2 E_2 \cos \frac{\phi}{2} \cdot e^{i\phi/2} \tag{9.64}$$

Da die Intensität $I = c \cdot \epsilon_0 \cdot E^2$ im zeitlichen Mittel betrachtet werden muss und der Faktor $e^{i\phi/2}$ nur eine Phasenverschiebung darstellt, ist

$$\langle I \rangle \approx I_{max} \cos^2 \frac{\phi}{2} \tag{9.65}$$

Diese Intensitätsverteilung hat für $m = 0, 1, 2, \dots$

- Maxima bei $\phi = 2\pi \cdot m \Rightarrow r_2 - r_1 = \lambda \cdot m$
also bei $\sin \theta = m \frac{\lambda}{d}$
- Minima bei $\phi = 2\pi \cdot (m + \frac{1}{2}) \Rightarrow r_2 - r_1 = \frac{1}{2}\lambda, \frac{3}{2}\lambda,$

Entscheidend für die Größe der Beugungsfigur ist also das Verhältnis von Wellenlänge λ zur geometrischen Ausdehnung d des beugenden "Objekts". Beispielsweise ist für $\lambda = 500\text{nm}$, $d = 0,01\text{mm}$ das erste Nebenmaximum ($m = 1$) bei $\theta = 2,9^\circ$.

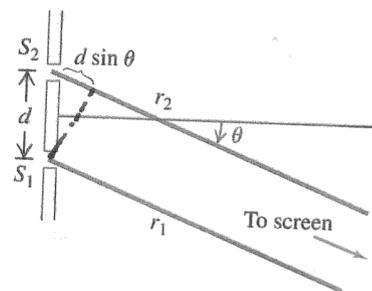


Abb. 9.24

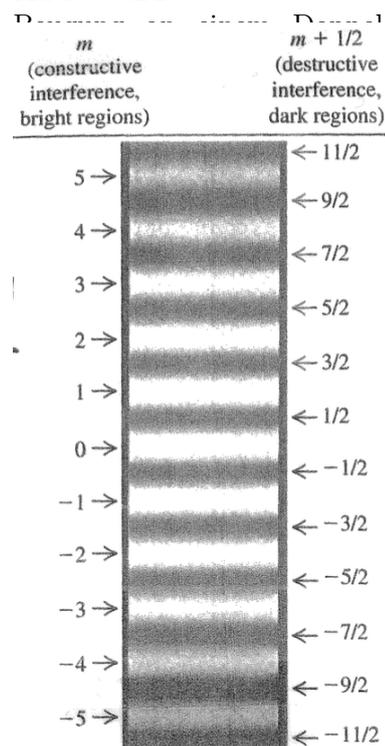


Abb. 9.25

Beugungsfigur an einem Doppelspalt mit sehr kleiner Breite der Spalte.
Beugung $\sim \frac{\lambda}{d}$

²⁰

$$1 + e^{i\phi} = e^{i\phi/2} \cdot (e^{-i\phi/2} + e^{i\phi/2}) = e^{i\phi/2} \cdot 2 \cos \frac{\phi}{2}$$

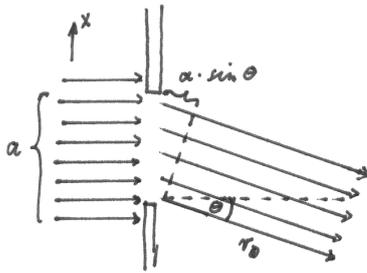


Abb. 9.26
Beugung an einem einzelnen Spalt.

9.10.2 Einzelspalt

Bei einem einzelnen Spalt mit Spaltbreite a ist die maximale Phasendifferenz

$$\beta = k \cdot a \cdot \sin \theta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \theta \quad (9.66)$$

Zu berechnen ist das Beugungsintegral

$$E_s(\theta) = \int_{\text{Spalt}} E_{in} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dx \quad (9.67)$$

bei dem alle Kugelwellen entlang des Spalts aufsummiert werden. In Fraunhofer-Näherung, $r_0 \gg a$, und mit $r = r_0 + x \cdot \sin \theta$ folgt

$$\begin{aligned} E_s(\theta) &\approx \underbrace{E_{in} \frac{1}{r_0} e^{i(\omega t - kr_0)}}_{E_0} \int_0^a e^{-ik \cdot x \cdot \sin \theta} dx \\ &= E_0 \frac{a}{-i\beta} (e^{-i\beta} - 1) = E_0 \frac{a}{-i\beta} e^{-i\beta/2} (-2i \sin \beta/2) \\ &= E_0 a e^{-i\beta/2} \cdot \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \end{aligned} \quad (9.68)$$

Die Intensitätsverteilung

$$\langle I \rangle \approx I_{max} \left(\frac{\sin \beta/2}{\beta/2} \right)^2 \quad (9.69)$$

hat demnach

- ein breites Maximum bei $\beta = 0$, d.h. $\theta = 0$,
- Minima bei $\beta = 2\pi \cdot m$ (mit $m = 1, 2, 3, \dots$), also

$$\sin \theta = m \cdot \frac{\lambda}{a} \quad (9.70)$$

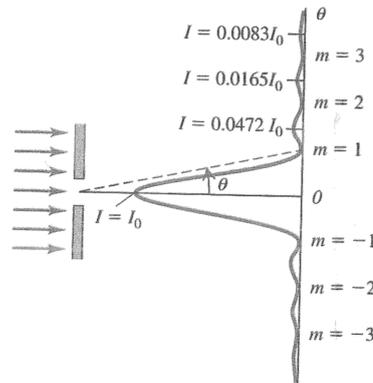


Abb. 9.27
Beugungsbild eines einzelnen Spalts.

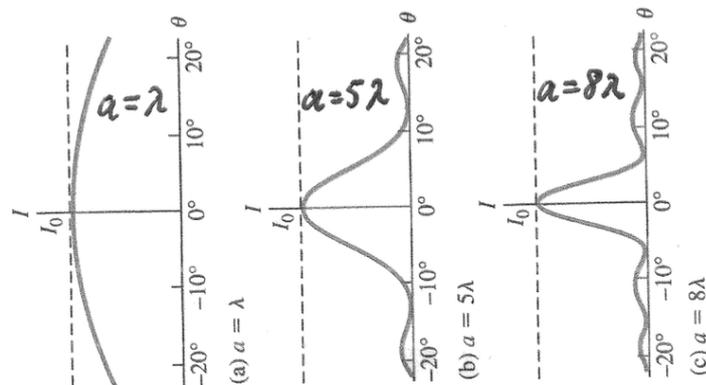


Abb. 9.28 Beugungsbild eines einzelnen Spalts mit verschiedenen Breiten.

9.10.3 Doppelspalt allgemein

Für einen Doppelspalt muss man die Feldstärken (nicht die Intensitäten) der beiden Spalten addieren. Die Rechnung folgt dem Schema für den Doppelspalt mit schmaler Breite. Mit

$$\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \cdot \sin \theta \quad \beta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \cdot \sin \theta \quad (9.71)$$

ist

$$E = E_{s1} + E_{s2} = E_{s2} (1 + e^{i\phi}) = 2E_{s2} \cos \frac{\phi}{2} e^{i\phi/2} \quad (9.72)$$

Mit der Einzelspalt-Feldstärke aus Gl. 9.68 folgt für den Doppelspalt

$$E \approx 2E_0 a \cos \frac{\phi}{2} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} e^{i(\frac{\phi}{2} - \frac{\beta}{2})} \quad (9.73)$$

und die Intensität

$$I \approx I_{max} \cos^2 \frac{\phi}{2} \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad (9.74)$$

Es gibt also Interferenz innerhalb der Spalten und zwischen den Spalten, und insbesondere ist

$$I \neq I_{s1} + I_{s2} \approx 2I_{s2} \quad (9.75)$$

9.10.4 Gitter

Bei der Addition der Feldstärken aller Spalten eines feinen Gitters gilt

$$E = \sum_{i=j}^N E_{si} = E_{s1} (1 + e^{i\phi} + e^{i2\phi} + e^{i3\phi} + \dots) \quad (9.76)$$

Die geometrische Reihe ergibt

$$E = E_{s1} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{i\phi})^n = E_{s1} \frac{e^{iN\phi} - 1}{e^{i\phi} - 1} = E_{s1} \frac{e^{iN\phi/2} \sin(N\phi/2)}{e^{i\phi/2} \sin(\phi/2)}$$

so dass mit der Einzelspaltamplitude

$$E = E_0 \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \quad (9.77)$$

die Intensität folgt:

$$\langle I \rangle = I_{max} \left(\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \right)^2 \left(\frac{\sin(\beta/2)}{\beta/2} \right)^2 \quad (9.78)$$

Damit werden bei hoher Spaltanzahl N die Maxima immer schmaler und schärfer, so dass sehr genaue Messungen von λ möglich werden.

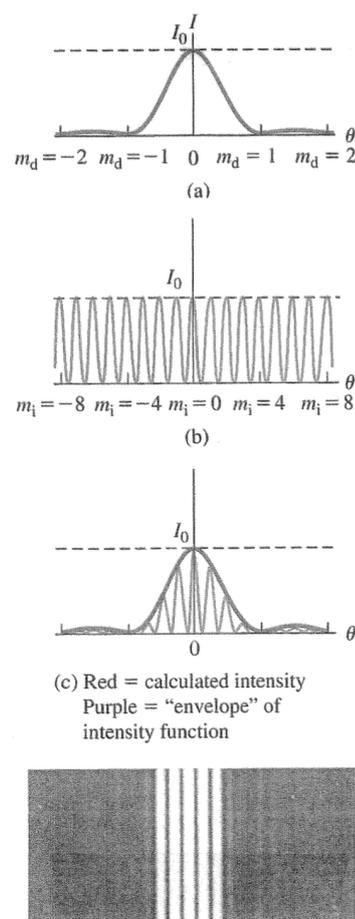


Abb. 9.29

Beugung an einem Einzelspalt der Breite a (oben), Doppelspalt mit Abstand $d = 4a$ und Breite $a = 0$ (mitte), Doppelspalt mit Abstand $d = 4a$ (unten) und Photo.

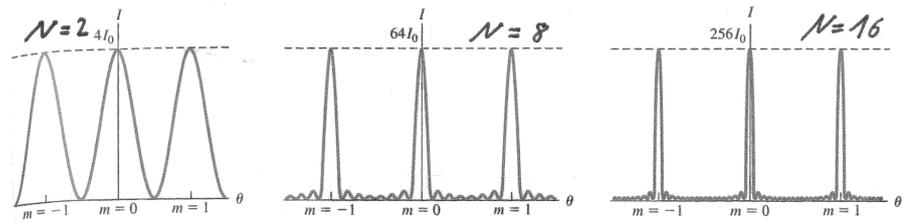


Abb. 9.30 Beugung an Gittern mit verschiedener Anzahl von Spalten.

9.10.5 Kreisförmige Öffnungen

Die Linse eines Fernrohrs oder eines Mikroskops bildet eine kreisförmige Blende, für deren Beugungsbild das 2-dimensionale Beugungsintegral

$$E = \iint_{\text{Öffnung}} E_{in} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} dx dy \quad (9.79)$$

gelöst werden muss. Man findet, dass das 1. Minimum bei

$$\theta_{min} = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (9.80)$$

liegt.

Eine Lochblende und eine Kreisscheibe erzeugen dabei ein ganz ähnliches Beugungsbild.

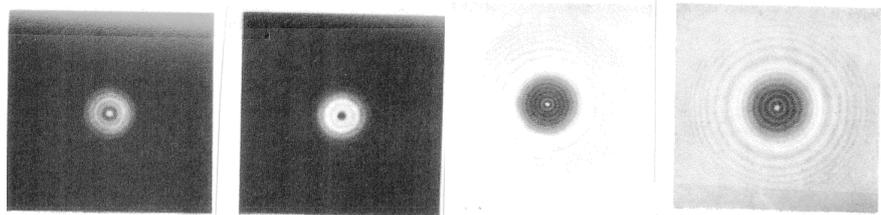


Abb. 9.32 Beugung an einer kreisförmigen Lochblende (links) und an einer kreisförmigen Scheibe (rechts).

Das Auflösungsvermögen eines Fernrohrs wird nach Abbe so definiert, dass das Maximum des Beugungsrings eines Sterns nicht näher als im Minimum der Beugungsfigur eines anderen Sterns liegen darf.

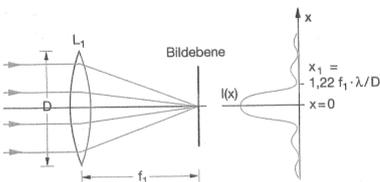


Abb. 9.31 Beugung an einer Blende.

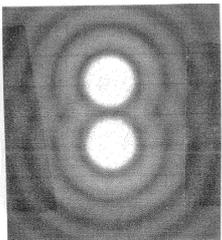


Abb. 9.33 Auflösungsvermögen von zwei Sternen durch Beugung.

9.11 Dopplereffekte

9.11.1 Linearer nichtrelativistischer Dopplereffekt in Medien

Für Wasserwellen oder Schallwellen ergibt sich eine Veränderung der messbaren Frequenz, wenn Sender oder Empfänger sich relativ zum Medium (Wasser, Luft) bewegen. Die resultierende Intensität kann ebenfalls nach dem Huygens'schen Prinzip berechnet werden, wir beschränken uns aber auf die Änderung der Frequenz. Dazu betrachten wir ausschließlich die Zeitpunkte maximaler Amplitude am Sender und Empfänger.

In einem System, in dem das Medium ruht, bewege sich Sender S und Empfänger E mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten v_S, v_E entlang einer Richtung,

$$x_S(t) = x_{S0} + v_S \cdot t \quad x_E(t) = x_{E0} + v_E \cdot t$$

Emittiert der Sender zwei aufeinanderfolgende Maxima zu den Zeiten t_a, t_b , mit Periodendauer $T_S = t_b - t_a$, so geschieht dies an unterschiedlichen Orten,

$$x_a = x_{S0} + v_S t_a \quad x_b = x_{S0} + v_S t_b$$

Die Maxima der Wellen bewegen sich mit Geschwindigkeit c ,

$$x_{wa}(t) = x_a + c \cdot (t - t_a) \quad x_{wb}(t) = x_b + c \cdot (t - t_b)$$

Sie erreichen den Empfänger zu den Zeiten t_c, t_d , wenn

$$x_{wa}(t_c) = x_E(t_c) \quad x_{wb}(t_d) = x_E(t_d)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} x_{S0} + v_S t_a + c \cdot (t_c - t_a) &= x_{E0} + v_E \cdot t_c \\ \Rightarrow (c - v_E) \cdot t_c &= (c - v_S) \cdot t_a + x_{E0} - x_{S0} \\ x_{S0} + v_S t_b + c \cdot (t_d - t_b) &= x_{E0} + v_E \cdot t_d \\ \Rightarrow (c - v_E) \cdot t_d &= (c - v_S) \cdot t_b + x_{E0} - x_{S0} \end{aligned} \quad (9.81)$$

Die Differenz beider Gleichungen ist

$$\boxed{(c - v_E) \cdot T_E = (c - v_S) \cdot T_S} \quad (9.82)$$

Hier ist $T_S = t_b - t_a$ die Periodendauer des Senders und $T_E = t_d - t_c$ die am Empfänger gemessene Periodendauer. Für die Frequenzen $\nu = 1/T$ folgt

$$\boxed{\nu_E = \frac{c - v_E}{c - v_S} \cdot \nu_S} \quad (9.83)$$

Alle Geschwindigkeiten sind hier (wie hoffentlich immer in 1-dim. physikalischen Gleichungen) entlang der gleichen Richtung definiert, d.h. gegebenenfalls mit Vorzeichen zu versehen. Insbesondere

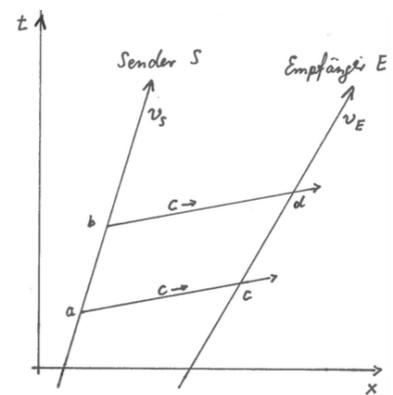


Abb. 9.34

Dopplereffekt: Der Sender sendet Maxima ab bei (t_a, x_a) und (t_b, x_b) .

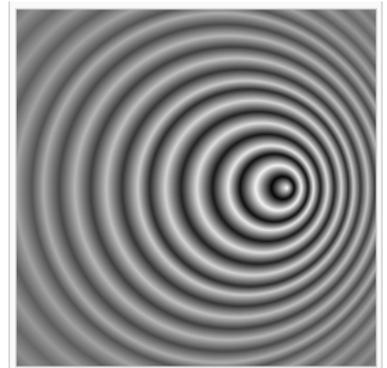


Abb. 9.35

Dopplereffekt in Wasser (Wikipedia).

zeigt c vom Sender zum Empfänger. Bewegen sich Sender und Empfänger in die gleiche Richtung, sind auch die gemessenen Frequenzen gleich. Die Frequenzverschiebung wird maximal, wenn sich Sender und Empfänger in entgegengesetzte Richtungen bewegen.

Bei einer Schallgeschwindigkeit von ca. 330 m/s ändert sich für eine Sirene bei $v_S = 100$ km/h die von einem Fußgänger ($v_E = 0$) empfundene Frequenz also um etwa 9%.

9.11.2 Transversaler nichtrelativistischer Dopplereffekt in Medien

Der oben beschriebene lineare Dopplereffekt beruht offenbar darauf, dass Sender und Empfänger ihren Abstand ändern, so dass aufeinanderfolgende Maxima der Welle unterschiedliche Wegstrecken zurücklegen müssen. Der Gangunterschied wird dann als Frequenzverschiebung fehlinterpretiert.

Bewegt sich beispielsweise der Sender in einer Kreisbahn um den Empfänger, so dass \vec{v}_E und Abstand senkrecht aufeinander stehen, so ergibt sich auch kein Dopplereffekt. Ist α der Winkel zwischen \vec{v}_S des Senders und der Richtung $\vec{r}_E(t_c) - \vec{r}_S(t_a)$, (und analog β für den Empfänger), so ist die Verallgemeinerung der Dopplerformel

$$\nu_E = \frac{c - v_E \cos \beta}{c - v_S \cos \alpha} \cdot \nu_S \quad (9.84)$$

Speziell ist damit der “transversale Dopplereffekt”, d.h.

$$\alpha = 90^\circ = \beta \quad (9.85)$$

bei (nichtrelativistischen) Wellen in Medien gleich Null.

9.11.3 Longitudinaler relativistischer Dopplereffekt

Laut spezieller Relativitätstheorie sind alle Inertialsysteme gleichberechtigt und ununterscheidbar. Man darf daher bei EM-Wellen im Vakuum auch nicht anhand des Dopplereffektes unterscheiden können, ob sich Sender oder Empfänger bewegen, d.h es gibt kein System eines Mediums.

Andererseits muss man den Dopplereffekt für EM-Wellen in jedem System ausrechnen dürfen, d.h. im System des Senders oder dem des Empfängers oder selbst in dem eines beliebigen fiktiven Systems.

Wir benutzen daher o.B.d.A. das System des Empfängers, d.h. wir setzen $v_E = 0$. Wählen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems so, dass die Ursprünge der Systeme von S und E zusammenfallen, so gilt laut Lorentztransformation für die Zeiten t'_a, t'_b und Orte x'_a, x'_b , alle gemessen im System des Senders,

$$ct_a = \gamma ct'_a + \gamma \beta x'_a \quad ct_b = \gamma ct'_b + \gamma \beta x'_b \quad (9.86)$$

Da im System des Senders $x'_a = x'_b$ ist, folgt

$$t_b - t_a = \gamma \cdot (t'_b - t'_a) \quad \Rightarrow \quad T_S = \gamma T'_S \quad (9.87)$$

Die vom Sender (in seinem System erzeugte) Periodendauer $T'_S = t'_b - t'_a$ ist also de facto durch die Zeitdilatation verändert im System des Empfängers. Die Ausbreitung der Welle und die Messung der Periodendauer T_E sind unverändert gegenüber der Rechnung im nichtrelativistischen Fall, denn es müssen keine weiteren Lorentztransformationen zwischen Systemen mehr berücksichtigt werden. Damit ist nach Gl. 9.82 im System des Empfängers mit $v_E = 0$

$$c \cdot T_E = (c - v_S) \cdot T_S = (c - v_S) \cdot \gamma T'_S = \frac{c - v_S}{\sqrt{1 - v_E^2/c^2}} T'_S \quad (9.88)$$

oder einfacher mit $\beta_S = v_S/c$,

$$T_E = \sqrt{\frac{1 - \beta_S}{1 + \beta_S}} \cdot T'_S \quad (9.89)$$

Die Frequenzverschiebung aufgrund der Kombination von Zeitdilatation und Abstandsänderung ist daher

$$\nu_E = \sqrt{\frac{1 + \beta_S}{1 - \beta_S}} \cdot \nu'_S \quad (9.90)$$

Diese Formel hängt tatsächlich nicht mehr von absoluten Geschwindigkeiten gegenüber einem absoluten Raum (oder Medium) ab, sondern nur noch von der Relativgeschwindigkeit von Sender und Empfänger.

In der Astrophysik spielt die Dopplerverschiebung eine große Rolle, da die Verschiebungen bekannter Spektrallinien benutzt werden können, um die Geschwindigkeiten von Sternen oder Galaxien relativ zu uns zu bestimmen (siehe Expansion des Universums, dunkle Materie, dunkle Energie).

9.11.4 Transversaler relativistischer Dopp- lereffekt

Wie beschrieben ist der transversale Dopplereffekt im nichtrelativistischen Fall gleich Null.

Relativistisch ist aber die Zeitdilatation zu berücksichtigen, da in sie nicht die Orientierung der Geschwindigkeiten eingeht, sondern der Betrag der Geschwindigkeit. Damit ist beim transversalen Dopplereffekt die Verschiebung der Periodendauer gegeben durch

$$T_E = \gamma T'_S = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot T'_S \quad (9.91)$$

und die Frequenzänderung

$$\nu_E = \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \nu'_S \quad (9.92)$$

Durch die Abhängigkeit von β^2 ist der Effekt viel kleiner als beim normalen Dopplereffekt.

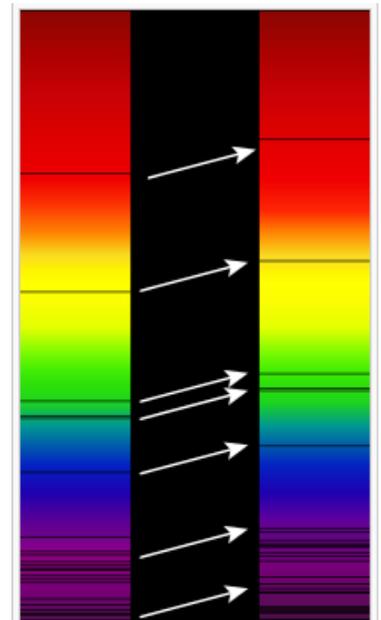


Abb. 9.36 Rotverschiebung eines entfernten Galaxienhaufens (Wikipedia).